

Квантовый компьютер

Ю.И.Ожигов¹

¹Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Физико-технологический институт РАН им. К.А.Валиева, e-mail: ozhigov@cs.msu.su

Глава 1

Введение в квантовую механику

Глава 2

Конечномерные модели КЭД

В этой главе мы опишем возможные программные примитивы для пользовательского интерфейса квантового компьютера. Этот интерфейс близок к описанию химии: здесь атомы в квантовых точках, которые мы считаем резонаторами, могут возбуждаться, когда электроны переходят на возбужденный уровень с поглощением фотона, релаксировать с испусканием фотона, фотоны и электроны могут переходить от атома к атому, и сами атомы могут переходить из одной точки в другую.

Если точек мало, физическая реализация такой модели предполагает наличие оптического резонатора в каждой точке, для предотвращения мгновенного вылета фотонов за пределы области эксперимента. Но если мы будем усложнять систему точек, модель будет все больше и больше напоминать открытое пространство, и тогда ограничение динамики фотонов стенками резонаторов постепенно должно уступить место ограничению в виде интерференционных эффектов в открытом пространстве.

Поэтому сначала мы изучим поведение атомов и поля в одном резонаторе, затем будем расширять нашу модель, вводя все новые и новые степени свободы и описывать возникающие здесь эффекты.

Некоторые особенности поведения квантовых систем можно предсказать заранее, так как их механизм имеет классическое объяснение. Другие особенности не имеют такого объяснения и даже противоречат классической интуиции - их мы называем квантовыми эффектами. Квантовые эффекты можно разделить на три группы:

1. Парадоксальное изменение во времени величины амплитуды: эффект DAT (dephasing assisted transport), квантовое бутылочное горлышко, быстрые квантовые алгоритмы, темные состояния атомов, оптическая темнота сетей, термические аттракторы.

2. Квантовое превосходство за счет парадоксального дальнего действия: распределенные вычисления, телепортация.

3. Возможность введения микро-причинности в связанных состояниях атомных ансамблей.

Важнейшей темой для квантовой операционной системы является явное включение в нее электромагнитного поля на уровне его квантов - фотонов. Классическое состояние поля есть отображение вида $R^4 \rightarrow R^4$ пространства - времени в 4-вектор

поля: $\phi(R, t)$, $\bar{A}(R, t)$. Для получения дискретизации K этого классического пространства состояний поля надо а) разбить пространство R^3 и время t на конечное число отрезков, предварительно ограничив рассматриваемую область, как это делалось в первой главе, б) проделать ту же процедуру и с самим значением поля, то есть со скалярным потенциалом ϕ и векторным потенциалом \bar{A} (см. [3]). И только после такой гигантской процедуры рассмотреть отображения вида $|\Psi_{field}\rangle : K \rightarrow C$, то есть вектор состояния поля.

Мы видим необозримую сложность такой процедуры. Она преодолевается в квантовой электродинамике с помощью ряда приемов, сводящихся к учету интерференции, сразу удаляющей океан паталогических состояний и радикально упрощающей возникающие состояния, на которых концентрируется львиная доля амплитуды. Например, можно показать, что вектор состояния одного фотона есть отображение, концентрирующее амплитуду на классическом состоянии $\epsilon \exp(i\omega(x - ct))$, где ϵ - малое число (откуда иногда делают формально некорректный вывод о том, что это и есть волновая функция фотона).

Сложность квантового представления поля - основная причина того, что поле фактически не включается в модели молекул, или включается в сильно урезанном виде - как кулоновское. Такие модели не могут правильно отобразить динамику, потому что она связана с векторным потенциалом \bar{A} , тогда как кулоновское электростатическое поле связано со скалярным потенциалом ϕ .

Приемы традиционной квантовой электродинамики не подходят для исследования квантового компьютера именно из-за своей специализации, нацеленной на только лишь малое число зарядов, или большое число зарядов с *одинаковым поведением*, то есть на простые системы.

К счастью, есть путь редукции сложности представления поля, открытый Джейнсом и Каммингсом. Эту схему мы и изучим в данной главе.

2.1 Моды электромагнитного поля

Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле, можно свести к наборам связанных друг с другом гармонических осцилляторов. Применяя к этим осцилляторам каноническое преобразование в виде преобразования Фурье, можно свести поле к наборам независимых гармонических осцилляторов, каждый из которых характеризуется определенной модой, то есть парой вида $(\bar{p}, \bar{\epsilon})$, где \bar{p} - вектор "импульса поля", равный по модулю $\hbar\omega/c$, где c - скорость света, ω - частота соответствующего осциллятора, $\bar{\epsilon}$ - направление поляризации. За деталями читатель может обратиться к книге [3].

Квантовое представление поля заключается в квантовании каждого из этих независимых осцилляторов; читатель может сам проделать вычисления, следуя указаниям в параграфе "Квантовый гармонический осциллятор" в Приложении. Тогда каждая мода распадается на кванты возбуждений - фотоны данной моды, и мы считаем вектор \bar{p} - вектором импульса фотона этой моды, а ω - его частотой. Фотоны разных мод различимы между собой, а фотоны в одной моде неотличимы друг от друга. Таким образом, базисными состояниями одной моды поля будут состояния вида $|n\rangle$,

где n - число фотонов в данной моде. Эти состояния называются состояниями Фока.

Квантовое состояние данной моды поля будет, таким образом, суперпозицией фокских состояний. Например, для любого комплексного числа α состояние

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.1)$$

называется когерентным состоянием поля; оно испускается идеальным лазером.

Читателю предлагается вычислить среднее число фотонов в состоянии $|\alpha\rangle$ и определить, для какого из операторов a , a^+ данное состояние является собственным. Определение операторов a и a^+ дано в Приложении, параграф ??.

Заметим, что фокские состояния не зависят ни от классической пространственной координаты, ни от времени: при каноническом преобразовании мы перешли к базисным состояниям, которые соответствуют импульсам, так что фиксация моды есть фиксация "импульса" гармонического осциллятора, представляющего поле. Отметим также, что каноническое преобразование не есть переход к другому базису в гильбертовом пространстве - базис тот же самый, просто порядок векторов в нем другой, то есть кубиты числовых представлений, которые как раз и определяют порядок на базисных векторах, уже имеют другой смысл. Это будет более подробно обсуждаться в третьей главе.

Деление поля на моды условно и зависит от выбора зерна пространственного разрешения dx , которое, в частности, зависит от детектора. Например, если рассматривать поле, заключенное внутри оптической полости (резонатора), фотоны в нем будут неразличимыми. Но если выпустить их из полости и детектировать на некотором расстоянии, то они могут стать и различимыми: их траектории далеко разойдутся и они попадут в разные детекторы.

2.2 Модель Джейнса-Каммингса

Трудность экспериментального учета электромагнитного поля состоит в том, что его кванты возбуждения путешествуют со скоростью света, так что едва появившись, фотон через секунду уже преодолеет большую часть расстояния от Земли до Луны. Метод удержания фотонов идейно прост: надо расположить друг напротив друга зеркала, отражающие фотон, так, чтобы он бегал между ними и не улетал далеко в течение достаточно большого времени. Это устройство называется интерферометром Фабри-Перо. Два зеркала образуют своеобразную полость, или резонатор, в который фотон можно запустить с помощью лазера, и извлечь с помощью зеркала с переменной отражательной способностью; такое зеркало называется ячейкой Поккельса. На ячейку можно подать напряжение, тогда она начнет отражать упавший на нее фотон; при выключенном же напряжении она становится прозрачной и фотон проходит через нее свободно. Боковые стенки полости также делают из отражающего свет материала.

Если в такую оптическую полость поместить атом, он сможет взаимодействовать с полем внутри полости, если для каких-то уровней энергии его электронов, которые

мы обозначаем через $|0\rangle$ - условно основной, и $|1\rangle$ - условно возбужденный уровни, энергия перехода между этими уровнями $\Delta E = \hbar\omega$ такова, что ω очень точно приближает частоту фотона в полости. При этом при поглощении фотона атом переходит от основного состояния $|0\rangle$ к возбужденному $|1\rangle$, и наоборот, при обратном переходе атома происходит испускание фотона. Полный цикл взаимодействия атома с полем, включающий поглощение атомом фотона и последующее его испускание, называется осцилляцией Раби. Для того, чтобы произошла одна такая осцилляция, например, в атоме рубидия Rb^{85} , где частота перехода между уровнями составляет примерно $\omega_{Rb} \approx 10^{10} \text{ sek}^{-1}$ фотон должен удерживаться в полости достаточно долго, так что за это время он успевает отразиться от зеркал несколько десятков тысяч раз. Поэтому зеркала должны быть очень качественными; их делают из сверхпроводящего материала, например, ниобия, и они функционируют при очень низкой температуре жидкого гелия.

Но качества зеркал недостаточно, так как фотон может просочиться из полости за счет своей интерференционной природы. Эта природа следует из принципа интерференции, который мы кратко описали в первой главе. Я рекомендую читателю обратиться к детальному разъяснению действия этого принципа по отношению к фотонам, приведенному в книге Р.Фейнмана [2]. Для того, чтобы фотон долго оставался в полости, необходимо, чтобы создаваемое им электрическое поле конструктивно интерферировало само с собой внутри полости, и деструктивно - вне ее. Это обеспечивается длиной полости - расстоянием между зеркалами L . Длина должна быть кратной полуволне длины фотона, то есть $L = k\lambda/2$, где $\lambda = 2\pi c/\omega$, $k = 1, 2, \dots$

Помещенный в полость атом взаимодействует с полем с энергией взаимодействия g , которая вычисляется по формуле

$$g = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} dE(x), \quad (2.2)$$

где V - эффективный объем полости (объем, где присутствует фотон), d - абсолютная величина дипольного перехода \bar{d} между $|0\rangle$ и $|1\rangle$, $E(x)$ - фактор расположения атома внутри полости. Цель состоит в том, чтобы сделать g как можно больше, для возможно быстрого проявления свойств взаимодействия света и вещества. Поэтому длина полости должна выбираться так, что $k = 1$, и $L = \lambda/2$. В этом случае конструктивная интерференция электрического поля фотона внутри полости максимальна, и его напряженность распределена по синусоиде, так что $E(x) = \sin(\pi x)/L$.

Дипольный переход считается по формуле $\bar{d} = \int_{R^3} \psi_0^* \bar{r} \psi_1 d\bar{r}$, где ψ_0 , ψ_1 - волновые функции состояний электрона в основном и возбужденном состояниях внутри атома, зависящие от трехмерного вектора \bar{r} . Фактический вывод формулы (2.2) можно найти в книге [3]. Константа g , вообще говоря, комплексна, но можно с помощью домножения базисного вектора $|1\rangle$ на подходящее комплексное число $e^{i\phi}$ добиться, чтобы g было вещественным неотрицательным числом, что мы и будем в дальнейшем предполагать.

Таким образом, взаимодействие поля с атомом внутри полости есть взаимодействие атома с квантовым гармоническим осциллятором, описанным в Приложении. Из параграфа ?? Приложения вытекает, что условная "координата" x поля с точностью до констант выражается через операторы рождения a^+ и уничтожения a фотона в поле как $x = a^+ + a$.

Введем, аналогично полевым операторам, операторы σ^+ , σ - атомные операторы возбуждения и релаксации; у нас получится набор операторов поля и атомов вида

$$\begin{aligned} a &: |n\rangle_{ph} \rightarrow \sqrt{n}|n-1\rangle_{ph}, & a^+ &: |n\rangle_{ph} \rightarrow \sqrt{n+1}|n+1\rangle_{ph}, \\ \sigma &: |0\rangle_{at} \rightarrow 0, & |1\rangle_{at} &\rightarrow |0\rangle, \\ \sigma^+ &: |0\rangle_{at} \rightarrow |1\rangle_{at}, & |1\rangle_{at} &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

так что число фотонов $n = 0, 1, 2, \dots$, а число, характеризующее атомное возбуждение, принимает только два значения 0 или 1, причем релаксация σ атома, уже находящегося в основном состоянии $|0\rangle_{at}$, приводит к уничтожению состояния как такового (ноль в пространстве состояний), а возбуждение уже возбужденного состояния атома дает тот же результат; в остальных случаях операторы действуют естественным образом.

Введем условную "координату" атомного возбуждения X по аналогии с полевой "координатой": $X = \sigma^+ + \sigma$. Пусть взаимодействие поля с атомом обозначается через $G(x, X)$, где x , X - условные "координаты" поля и атомного возбуждения соответственно. Раскладывая эту функцию в ряд Тейлора, мы видим, что самый младший член взаимодействия, содержащий обе координаты, имеет вид $gxX = g(a^+ + a)(\sigma^+ + \sigma)$. Это называется дипольным приближением взаимодействия атома и поля. Оно справедливо, если размер атома существенно меньше длины волны фотона; такое предположение выполняется в большинстве практически важных случаев, например, в химии.

Если учесть следующие члены в разложении Тейлора функции $G(x, X)$, получатся более высокие члены в приближении взаимодействия; ими мы не будем заниматься.

Собственные энергии атома и поля, согласно Приложению, даются формулами $E_{at} = \hbar\omega\sigma^+\sigma$, $E_{ph} = \hbar\omega a^+a$. Энергию вакуумного состояния $\hbar\omega/2$ мы опускаем, так как в данном случае она не играет роли.¹ Суммируя их с энергией взаимодействия, мы получаем гамильтониан Джейнса-Каммингса для двух-уровневого атома в оптической полости:

$$H_{JC} = \hbar\omega a^+a + \hbar\omega\sigma^+\sigma + g(a^+ + a)(\sigma^+ + \sigma). \quad (2.4)$$

Решать задачу Коши для уравнения Шредингера с таким гамильтонианом довольно сложно. Дело в том, что взаимодействие содержит члены $a\sigma$ и $a^+\sigma^+$, которые по отдельности не сохраняют энергию. Это означает, что для потенциально бесконечной матрицы оператора H_{JC} нет конечномерных инвариантных подпространств, и приходится иметь дело с бесконечностями, что затруднительно и неверно по существу.

К счастью, эта трудность обходится для большей части приложений, где сила взаимодействия g мала по сравнению с энергией возбуждения $\hbar\omega$ атома. Если $g/\hbar\omega \ll 1$, не сохраняющие энергию члены можно отбросить, и гамильтониан примет гораздо

¹Читателю предоставляется проверить, что добавление константы к гамильтониану, то есть переход от H к $H + cI$, приводит только к появлению дополнительного фазового множителя вида $e^{-ict/\hbar}$ в решении уравнения Шредингера, который не имеет физического смысла и исчезает при переходе к уравнению Шредингера для матрицы плотности.

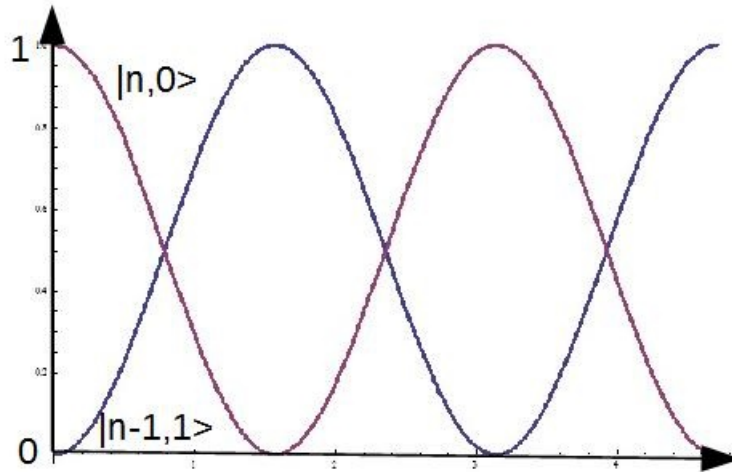


Рис. 2.1: Осцилляции Раби между населенностями состояний $|n, 0\rangle$ и $|n - 1, 1\rangle$.

более удобный вид

$$H_{JC}^{RWA} = \hbar\omega a^+ a + \hbar\omega \sigma^+ \sigma + g(a^+ \sigma + a \sigma^+). \quad (2.5)$$

Это так называемое приближение вращающейся волны RWA, его вывод можно найти в Приложении.

Наша физическая система - композитная. Она состоит из двух частей: поля и атома. Договоримся обозначать базисные состояния, выписывая сначала число фотонов в поле, а затем - атомное возбуждение: $|n, m\rangle$, так что $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1$, и опускать нижние индексы ph и at . При записи операторов примем обычно соглашение: если не указан оператор, действующий на другой элемент композитной системы, он предполагается оператором идентичным: I_{at} или I_{ph} . Таким образом, например, запись $a^+ a$ надо трактовать как $a^+ a \otimes I_{at}$, а запись $a \sigma^+$ - либо как $a \otimes \sigma^+$, либо как матричное произведение $a \otimes I_{at} \cdot I_{ph} \otimes \sigma^+$. Проверьте, что оба пути дают один и тот же результат.

Для гамильтониана H_{JC}^{RWA} пространство квантовых состояний распадается в прямую сумму инвариантных двумерных подпространств \mathcal{H}_n , каждое соответствует энергии $E_n = \hbar\omega n$, и порождается векторами $|n, 0\rangle$, $|n - 1, 1\rangle$. Гамильтониан, ограниченный на \mathcal{H}_n , имеет вид

$$H_n = \begin{pmatrix} \hbar\omega n & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \hbar\omega n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) говорит о том, что состояния $|n, 0\rangle$ и $|n - 1, 1\rangle$ переходят одно в другое в ходе эволюции, причем их населенность меняется по синусоидальному закону (см. рисунок 2.1).

Отсюда видно, что населенности состояний $|n, 0\rangle$ и $|n - 1, 1\rangle$ чередуются, колеблясь в противофазе. Если на одной из вершин графика населенности состояния $|n, 0\rangle$ каким-то образом извлечь из полости фотоны (это делается с помощью специального

оптического зеркала - ячейки Поккельса), то атом останется в полости в основном состоянии. Это важное замечание пригодится нам в дальнейшем, при конструировании квантового гейта coCSign.

2.3 Декогерентность в модели Джейнса-Каммингса

Оптические полости никогда не могут быть идеальными: фотоны способны как "просачиваться" сквозь их стенки - за счет интерференции, так и попадать в полость извне - также за счет интерференции. Кроме того, в экспериментах в полость попадают фотоны, испущенные лазером, равно как и детектируются с помощью фотодетектора фотоны, вылетающие из полости. Все эти процессы есть взаимодействие с окружением, и потому они должны описываться квантовым основным уравнением (??).

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда в полости в первоначальный момент находится один фотон и атомов нет вообще. Гамильтониан тогда имеет вид $H_{ph} = \hbar\omega a^\dagger a$, а линдбладовский оператор утечки фотона из полости $A_1 = a$ является здесь единственным фактором декогерентности. Предполагается, что фотон, вылетевший из полости, оказывается в некотором, воображаемом, резервуаре, который мы будем называть стоком, причем этот процесс утечки необратим, и вылетевший фотон уже никогда не сможет вернуться обратно в полость. Физически это означает, например, что вылетевший фотон попадает в фотодетектор, где и оканчивает свое существование как отдельная частица. Базисные состояния фотона имеют вид $|0\rangle$ - фотона в полости нет, и $|1\rangle$ - фотон в полости. Матрица плотности имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_0(t) & \beta(t) \\ \bar{\beta}(t) & p_1(t) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где $p_0(0) = 0$, $p_1(0) = 1$. Уравнение (??) в нашем случае имеет вид

$$i\hbar\dot{\rho} = [H_0, \rho] + i\gamma(a\rho a^\dagger + \frac{1}{2}(\rho a^\dagger a + a^\dagger a\rho))$$

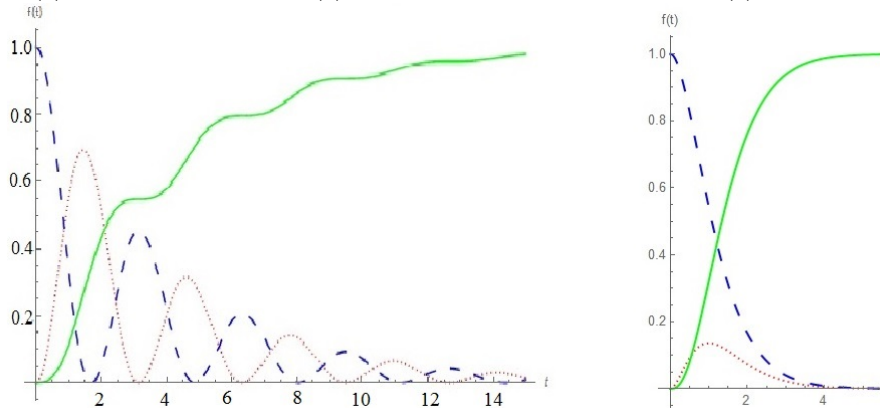
и его можно решить аналитически. Это решение дает $\beta(t) = 0$, $p_1(t) = e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), $p_0(t) = 1 - p_1(t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$) (проделайте выкладки самостоятельно).

Рассмотрим теперь немного более сложный процесс утечки фотона из полости с одним двухуровневым атомом, первоначально находящимся в возбужденном состоянии $|1\rangle$ в отсутствие фотонов в полости. Линдбладовский оператор утечки фотона из полости $A_1 = a$ является здесь снова единственным фактором декогерентности. Эту задачу также можно решить аналитически (см. [20]). Базисных состояний системы будет теперь три: $|10\rangle$ - фотон в полости, атом в основном состоянии, $|01\rangle$ - атом возбужден, фотона нет, $|00\rangle$ - фотона нет и атом в основном состоянии. Матрица плотности, соответственно, будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} p_{00}(t) & \xi(t) & \alpha(t) \\ \bar{\xi}(t) & p_{01}(t) & \beta(t) \\ \bar{\alpha}(t) & \bar{\beta}(t) & p_{10}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

При численном моделировании важно иметь в виду следующее

Рис. 2.2: Динамика диагонали матрицы плотности: левый рисунок - для $g_{out} = 0.5, g_1 = 1$, правый - для $g_{out} = 1, g = 1$. Зеленым цветом изображена зависимость $p_{00}(t)$, пунктиром - $p_{01}(t)$, точечным пунктиром $p_{10}(t)$.



Замечание. Здесь мы фактически редуцировали пространство состояний, исходя из физического смысла задачи до размерности 3. Поэтому применять наше условие о трактовке слагаемых гамильтониана как $a^+a \otimes I_{at}$ (с.м. выше) уже нельзя. Для того, чтобы это условие можно было применить, надо добавить к нашим состояниям еще одно: $|11\rangle$ - фотон в полости и атом возбужден, так как тензорное произведение пространств состояний поля и атома требует еще и этого состояния, которое у нас никогда не появится в реальной эволюции.

Результат показан на рисунке 2.2.

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях - полость без атома и полость с одним атомом, сток со временем наполняется полностью, то есть $p_{00}(t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$), хотя скорость его наполнения зависит от интенсивности γ вылета фотона из полости. Читателю предлагается осмыслить тот факт, что $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ при любых t . Отсутствие когерентностей связано с необратимостью вылета фотона из полости: вылетевший фотон никак не может интерферировать с оставшимся в полости. Отметим также, что в случае отсутствия атома в полости наполнение стока тем больше, чем больше его интенсивность γ .

2.4 Квантовое бутылочное горлышко

Для модели Джейнса-Каммингса имеет место один важный контр-интуитивный эффект с чисто квантовым механизмом - квантовое бутылочное горлышко.

Если мы присоединим к нашей полости сток (sink) явным образом, взаимодействие полости со стоком будет описываться квантовым основным уравнением с одним фактором декогерентности $A_1 = a_{sink}^+ a$, означающим исчезновение фотона в полости и появление его в стоке, то есть необратимый улет фотона из полости. Интенсивность γ этого фактора есть интенсивность улета фотона из полости. Эту интенсивность можно менять, например, ставя дополнительные ячейки Пококельса в полость, что повышает γ , или уменьшая площадь ячейки, что уменьшает γ .

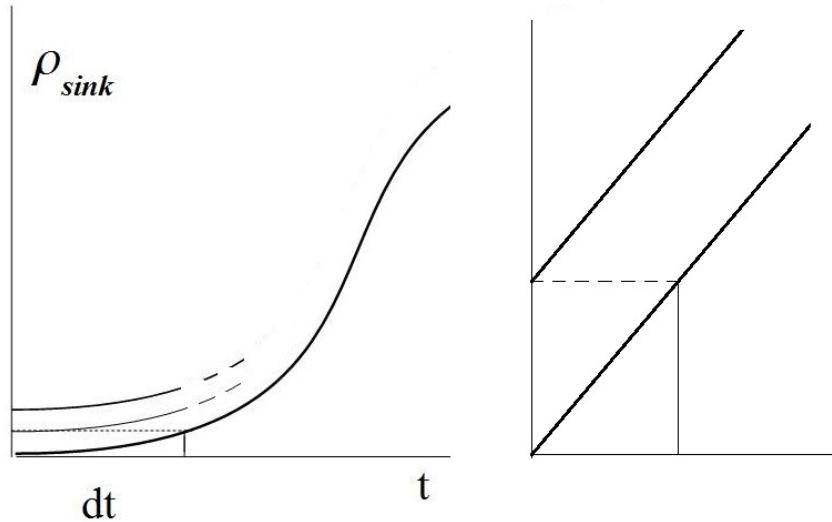


Рис. 2.3: Квантовое бутылочное горлышко: ρ_{sink} - наполнение стока - слева в квантовом случае, справа - в классическом. В квантовом случае наполнение стока тормозится из-за того, что график касается оси абсцисс.

Базисными состояниями системы будут $|n\rangle_{cav}|n'\rangle_{sink}|m\rangle_{at}$, где n, n' - число фотонов в полости и в стоке. Ограничим размерность, предположив наличие RWA и выбирая начальное состояние в виде $|0\rangle|0\rangle|1\rangle$ - когда фотонов нет, а атом возбужден; в этом случае динамика будет развиваться в трехмерном пространстве, порожденном векторами $|001\rangle, |010\rangle, |100\rangle$. Пусть $\rho(t)$ - матрица плотности нашей системы. Населенность стока $\langle 010|\rho(t)|010\rangle$ (вероятность нахождения в нем фотона) характеризует динамику вылета фотона из полости.

Оказывается, что присутствие атома в полости меняет динамику наполнения стока очень существенно: наполнение стока зависит от интенсивности вылета фотона немонотонно. При некоторой величине γ сток наполняется наиболее быстро, но при дальнейшем увеличении γ его наполнение парадоксальным образом снижается, причем при $\gamma \rightarrow \infty$ наполнение стока падает практически до нуля! Это и есть квантовое бутылочное горлышко.

Объяснение этого эффекта дано на рисунке 2.3. График наполнения стока касается оси абсцисс, так как без стока динамика присутствия фотона в полости имела бы квадратичный вид в силу правила Борна. После применения супероператора Линдблада в течение времени dt фотон в полости исчезает, что означает сдвиг элемента матрицы плотности снова в ноль; эффект для стока будет, таким образом, бесконечно малой второго порядка по dt . Так как при численном решении квантового основного уравнения повышение интенсивности фактически эквивалентно уменьшению времени одного шага dt при фиксации интенсивности улета γ , то повышение интенсивности стока ведет к уменьшению наполнения полости, что и показывает численное моделирование данного эффекта. Эффект квантового бутылочного горлышка имеет место и для нескольких полостей, соединенных волноводами (см. 2.9). Результат моделирования этого эффекта для 2 полостной системы показан на рисунке 2.4.

Этот эффект похож на "замораживание" квантового состояния постоянными из-

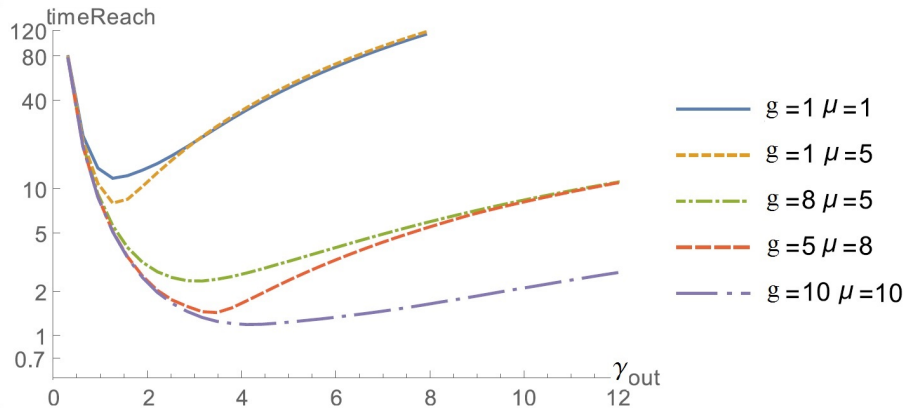


Рис. 2.4: Квантовое бутылочное горлышко для системы двух полостей с атомами, взаимодействующими с полем с энергией g , соединенных волноводом с энергией перехода μ (в условных единицах). Время наполнения стока до $s = 0.995$ в зависимости от силы стока γ_{out} всегда имеет локальный минимум в противоположность классическому случаю, где эта функция всегда убывает. При $\gamma_{out} \rightarrow \infty$ в квантовом случае график стремится к бесконечности. Рисунок взят из статьи [20].

мерениями - эффект Зенона, однако бутылочное горлышко более конкретно и потому может иметь применение в различных областях; например, в атомных превращениях.

Пусть атом, находящийся в возбужденном состоянии, может трансформироваться, превратившись в иной объект, и потерять, тем самым, возможность взаимодействия с полем полости. Такой трансформацией может быть химическая реакция или распад атомного ядра. Вылет фотона из полости можно назвать ее оптическим "охлаждением". Проявление эффекта бутылочного горлышка здесь состоит в том, что усиление интенсивности оптического "охлаждения" ведет не к уменьшению вероятности трансформации атома, а напротив - к ее увеличению.

Эффект полностью сохраняется и в случае многоатомных ансамблей. Возможно, квантовый эффект бутылочного горлышка способен играть какую-то роль и в процессах макроскопических масштабов, представляющих практический интерес, приводя к контринтуитивным последствиям.

2.5 Модель Тависа-Каммингса

Модель Джейнса-Каммингса-Тависа (ТС) описывает динамику группы n двухуровневых атомов в оптической полости, взаимодействующих с одномодовым полем внутри нее с энергиями g_1, g_2, \dots, g_n . Значение этой модели в том, что она позволяет описать очень сложное в вычислительном плане взаимодействие света и вещества в рамках конечномерной вычислительной модели, допускающей, к тому же, физические прототипы, среди которых самый разработанный имеет вид оптической полости - резонатора и группы атомов, удерживаемых в нем оптическими пинцетами.

Введем вспомогательные операторы $\bar{\sigma} = \sum_{j=1}^n g_j \sigma_j$, $\bar{\sigma}^+ = \sum_{j=1}^n g_j \sigma_j^+$. Гамильтониан Тависа-Каммингса (см. [21],[22],[23]) H_{TC}^{RWA} для n двухуровневых атомов в оптиче-

ской полости, частота которой совпадает с частотой фотона атомного возбуждения имеет вид:

$$H_{TC} = H_c + H_a + H_i, \quad H_c = \hbar\omega a^+ a, \quad H_a = \hbar\omega \sum_{j=1}^n \sigma_j^+ \sigma_j, \quad H_i = (a^+ + a)(\bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}). \quad (2.9)$$

В условиях применимости RWA приближения: $g_j/\hbar\omega \ll 1$ для всех j энергия взаимодействия поля и атомов принимает вид $H_i^{RWA} = g_j(a\bar{\sigma}^+ + a^+\bar{\sigma})$.

Итак, атомы в данной модели взаимодействуют друг с другом только через поле, то есть через обмен фотонами.²

2.6 Темные состояния кубитовых систем

Наличие нескольких атомов в полости создает совершенно новую ситуацию, делая возможным существование особых состояний атомной системы, при которых интерференция атомов блокирует их взаимодействие с полем. Например, состояние $|s\rangle = |01\rangle - |10\rangle$ двухатомной системы при $g_1 = g_2$, называемое синглетом, не может ни испустить, ни поглотить фотона, так как возможное испускание фотона одним из атомов блокируется аналогичной возможностью со стороны другого. Действительно, поскольку фотоны в полости для всех атомов общие, испускание фотона вторым атомом есть применение $\sigma_2 a^+$, оно приведет от $|0\rangle_{ph}|s\rangle$ к состоянию $|1\rangle_{ph}|00\rangle$, а испускание фотона первым атомом (применение $\sigma_1 a^+$) даст $-|1\rangle_{ph}|00\rangle$, в итоге никакого испускания фотона не произойдет вообще!

Темным состоянием атомной системы называется такое состояние, в котором атомы не могут испустить фотона. Прозрачным называется такое состояние, в котором атомы не могут поглотить фотона. Невидимым - такое, в котором атомы не могут ни поглотить, ни испустить фотона, то есть вообще не взаимодействуют с полем. Эти определения зависят от применимости RWA.

Рассмотрим сначала случай применимости RWA.

Испускание фотона есть оператор $\bar{\sigma} a^+$, и потому подпространство темных состояний $Dark^{RWA}$ есть ядро оператора $\bar{\sigma}$: $Dark^{RWA} = Ker(\bar{\sigma})$. Аналогично, подпространство прозрачных состояний $Trans^{RWA} = Ker(\bar{\sigma}^+)$ и подпространство невидимых $Invis^{RWA} = Ker(\bar{\sigma}) \cap Ker(\bar{\sigma}^+)$.

Теперь рассмотрим случай точного гамильтониана H_{TC} . Здесь оператор испускания фотона уже имеет вид $\bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}$ и совпадает с оператором поглощения фотона. Поэтому в точном решении темные, прозрачные и невидимые состояния - одно и то же $Dark = Trans = Invis = Ker(\bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma})$. Поскольку для любого атомного состояния $|\Psi\rangle_{at}$ его образы при применении операторов $\bar{\sigma}^+$ и $\bar{\sigma}$ не имеют общих ненулевых базисных компонент, мы получаем $Ker(\bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}) = Ker(\bar{\sigma}) \cap Ker(\bar{\sigma}^+)$ и $Dark = Invis^{RWA}$.

²В модель ТС можно включить и прямое, диполь-дипольное взаимодействие атомов друг с другом, добавив в гамильтониан слагаемые вида $\beta_{i,j}(\sigma_i \sigma_j^+ + \sigma_i^+ \sigma_j)$, а также учесть аналогичным образом и нелинейные оптические эффекты.

Пусть $|j\rangle$ - базисное состояние системы n кубит; введем обозначение $N = 2^n$ - это размерность всего пространства квантовых состояний n -кубитной системы. Обозначим через $1(j)$ вес Хамминга этого состояния, то есть число единиц в его записи; тогда число нулей в ней будет $0(j) = n - 1(j)$. Определим бинарное отношение на базисных состояниях, обозначаемое через $Emission(j, j')$, которое будет истинным тогда и только тогда, когда j' получается из j заменой одной единицы нулем. Иными словами, j' получается из j действием понижающего оператора на один из атомов, находящихся в возбужденном состоянии. В этом случае $1(j') = 1(j) - 1$. Испускание фотона атомной системой, находящейся в состоянии $|j\rangle$, имеет вид

$$|0\rangle_p |j\rangle \longrightarrow |1\rangle_p |j'\rangle, \quad (2.10)$$

где истинно $Emission(j, j')$.

Для базисного состояния $|j'\rangle$ назовем j' -семьей множество базисных состояний $|j\rangle$, таких что истинно $Emission(j, j')$. Иными словами, j' -семья состоит из базисных состояний $|j\rangle$, для которых переход вида (2.10) является испусканием фотона. j' -семью мы обозначаем через $[j']$ и называем состояние $|j'\rangle$ ее родоначальником.

Заметим, что две различные семьи могут иметь не более одного общего члена.

Рассмотрим теперь произвольное атомное состояние $|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle$. Из определения испускания фотона следует, что состояние $|\Psi\rangle$ темное в RWA приближении тогда и только тогда, когда выполнена система уравнений вида

$$\sum_{s \in [j']} \lambda_s = 0, \quad (2.11)$$

для всех $j' = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Заметим, что достаточно потребовать выполнение данных равенств только для $j' = 0, 1, \dots, 2^n - 2$, так как семья $[2^n - 1]$ пуста: в базисное состояние, состоящее из одних возбужденных атомов при испускании фотона никакое состояние перейти не может.

Обозначим через B_k^n множество базисных n -кубитных состояний j , таких что $1(j) = k$, и через \mathcal{H}_k^n - порожденное B_k^n подпространство. Тогда для любого базисного состояния j' его семья целиком принадлежит $B_{1(j')+1}^n$. Следовательно, всякое темное состояние является суперпозицией темных состояний, принадлежащих подпространствам \mathcal{H}_k^n , $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Обозначим через D_k^n подпространство \mathcal{H}_k^n , состоящее из темных состояний в RWA приближении. Тогда $D_k^n = \mathcal{H}_k^n \cap Ker(\bar{\sigma})$.

Мы всегда будем нумеровать кубиты слева направо, обозначая символом $*$ пропущенный кубит, так что, например, вместо $|0\rangle_1 |1\rangle_3$ пишем $|0 * 1\rangle$.

Примерами состояний из D_k^n являются так называемые (n, k) -синглеты: состояния, полученные тензорным произведением k штук состояний вида $|0\rangle_p |1\rangle_q - |1\rangle_p |0\rangle_q$, где $1 \leq p < q \leq n$ и $n - 2k$ состояний вида $|0\rangle_q$, $1 \leq q \leq n$. Для $n = 4$, $k = 2$ (n, k) -синглетами будут следующие состояния

$$\begin{aligned}
(4, 2)_1 &= (|0 * 1 * \rangle - |1 * 0 * \rangle)(* |0 * 1 \rangle - | * 1 * 0 \rangle) \\
&= |0011 \rangle - |0110 \rangle - |1001 \rangle + |1100 \rangle), \\
(4, 2)_2 &= (|0 \rangle |1 \rangle - |1 \rangle |0 \rangle)^{\otimes 2} = |0101 \rangle - |0110 \rangle - |1001 \rangle + |1010 \rangle, \\
(4, 2)_3 &= (|0 * * 1 \rangle - |1 * * 0 \rangle)(| * 0 1 * \rangle - | * 1 0 * \rangle) \\
&= |0011 \rangle - |0101 \rangle - |1010 \rangle + |1100 \rangle).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Эти состояния будут линейно зависимы, но любые два из них - линейно независимы и образуют базис D_2^4 , что легко проверить непосредственно.

Заметим, что при $n = 2k$ все (n, k) - синглеты невидимы без RWA приближения.

Теорема о структуре темных состояний

1. $\dim(D_k^n) = \max\{C_n^k - C_n^{k-1}, 0\}$.
2. Любое состояние из D_k^n является линейной комбинацией (n, k) - синглетов

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении - ??.

Отметим, что для трех-уровневых систем доказать аналогичное данной теореме утверждение пока не удалось³.

Описание собственных состояний для гамильтониана Тависа- Каммингса приведено в диссертации Михаеля Тависа [23]; оно весьма сложно. Однако практический смысл имеет именно описание темных состояний атомных ансамблей. Добавление к этим состояниям фотонов позволяет получать собственные состояния этого гамильтониана, имеющие ясный практический смысл: в таких состояниях нет взаимодействия поля с атомами. Такое взаимодействие является главным каналом декогерентности - разрушения сложных квантовых состояний в результате контакта с окружением. Поэтому темные состояния представляют естественное подпространство, свободное от декогерентности, что важно для квантовых вычислений. Темные состояния являются также естественными аккумуляторами малых порций энергии, что может представлять интерес при создании нано-роботов.

2.7 Термическая стабилизация

Рассмотрим полость с атомами, помещенную в "ванну" из фотонов, так что имеется постоянный приток и постоянный сток фотонов в полость и из полости соответственно с интенсивностями γ_{in} и γ_{out} (см. 2.5). Соответствующее квантовое основное уравнение (??) будет иметь два фактора декогерентности: $A_{out} = a$, $A_{in} = a^+$.

Если для начального состояния $\rho(t)$ системы "атомы+поле" решение (??) сходится к некоторой матрице $\rho(t) \rightarrow \rho_{stat}$ ($t \rightarrow \infty$), то данную матрицу ρ_{stat} мы назовем термическим стабилизатором для $\rho(0)$, и все стабилизаторы будем называть термически стабильными состояниями такого уравнения (??).

³В работе [24] приведено внешнее, алгебраическое описание темных состояний; но из него нельзя непосредственно получить того явного описания, которое дается приведенной Теоремой даже для двухуровневых атомов.

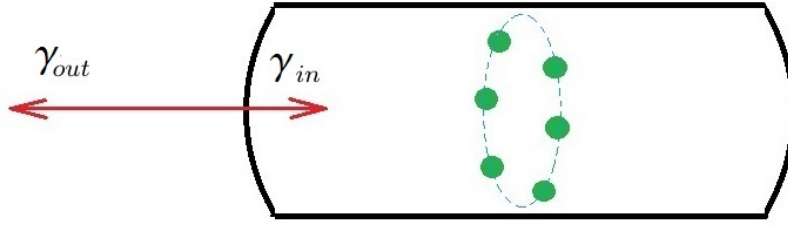


Рис. 2.5: Полость в фотонной "ванне"

Определим стационарное состояние поля с температурой T как смешанное состояние с гиббсовским распределением компонент Фока:

$$\mathcal{G}(T)_f = c \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega n}{KT}} |n\rangle\langle n|, \quad (2.13)$$

где K - константа Больцмана, c - нормировочный множитель. Введем обозначение $\gamma_{in}/\gamma_{out} = \mu$. Состояние $\mathcal{G}(T)_f$ будет тогда существовать только при $\mu < 1$, поскольку в противном случае температура будет бесконечно большой и состояние $\mathcal{G}(T)_f$ будет ненормируемым.

Населенность фотонного фоковского состояния $|n\rangle$ при температуре T пропорциональна $\exp(-\frac{\hbar\omega n}{KT})$. В нашей модели мы полагаем $\frac{\gamma_{in}}{\gamma_{out}} = \exp(-\frac{\hbar\omega}{KT})$, откуда $T = \frac{\hbar\omega}{K \ln(\gamma_{out}/\gamma_{in})}$.

Сначала заметим, что для нулевой температуры $T = 0$ фотонной "ванны" чистые стационарные состояния квантового основного уравнения (??) в модели ТС (ТС-RWA) имеют вид $|0\rangle_{ph}|D\rangle$, где $|D\rangle$ есть темное состояние в соответствующей модели ТС (ТС-RWA). Смешанные стационарные состояния есть смеси таких состояний.

Действительно, стационарные состояния есть решения квантового основного уравнения (??) при $\dot{\rho} = 0$, так что $\dot{\rho} = 0$. Представив чистое стационарное состояние $|S\rangle$ в виде суммы по энергиям поля:

$$|S\rangle = |0\rangle_{ph}|\Phi^0\rangle_{at} + |1\rangle_{ph}|\Phi^1\rangle_{at} + \dots + |n\rangle_{ph}|\Phi^n\rangle_{at} + \dots, \quad (2.14)$$

где нижний индекс обозначает полевое и атомное состояние, мы видим, что в (2.14) есть лишь один ненулевой член - первый. Из этого немедленно следует, что состояние $|S\rangle$ темное.

Теорема 1 Термически стационарное состояние атомов и поля при температуре T имеет вид $\rho_{stat} = \rho_{ph} \otimes \rho_{at}$, где ρ_{at} есть состояние атомов, а состояние поля $\rho_{ph} = \mathcal{G}(T)_f$ есть стационарное при данной температуре.

Доказательство

Мы разложим гамильтониан $H = H_{at} + H_{ph}$ на атомную часть H_{at} и чисто полевою компоненту $H_{ph} = \hbar\omega a^\dagger a$, и введем обозначения $U_{dt}(\rho) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{at}dt} \rho e^{\frac{i}{\hbar}H_{at}dt}$, $U'_{dt}(\rho) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{ph}dt} \rho e^{\frac{i}{\hbar}H_{ph}dt}$ для действия слагаемых унитарной компоненты правой части квантового основного уравнения (??) на коротком отрезке времени dt .

Мы обозначим через $L'_{dt}(\rho) = \rho + dt \mathcal{L}(\rho)$ действие линдбладовского супероператора на матрицу плотности в течение времени dt . С точностью dt мы имеем тогда приближенное равенство

$$\rho(t) \approx (U_{dt} U'_{dt} L'_{dt})^{t/dt}(\rho), \quad (2.15)$$

аналогичное формуле Троттера, которое вытекает из приведенного в первой главе эйлера метода решения уравнения (??).

Поскольку операторы L'_{dt} и U'_{dt} действуют только на полевую компоненту состояния, а U_{dt} - как на полевую, так и на атомную компоненту, стационарное состояние ρ_{stat} при случайно выбранных константах взаимодействия g , и γ_{in} , γ_{out} не должно меняться при действиях операторов $L''_{dt} = U'_{dt} L'_{dt}$, и U_{dt} .

Зафиксируем произвольно базисные состояния атомов I, J и рассмотрим минор ρ_{IJ} матрицы плотности ρ , образованный коэффициентами базисных состояний $|I, i\rangle\langle J, j|$, где $|i\rangle, |j\rangle$ - фоковские состояния поля. Оператор L'_{dt} , действующий на фотонную компоненту, фактически действует на минор ρ_{IJ} .

Обозначим через $\tilde{\rho}$ результат применения оператора L'_{dt} к минору $\rho_{IJ} = \rho$, так что $\tilde{\rho}_{i,j}$ обозначают матричные элементы этого результата и ρ_{ij} - матричные элементы начального состояния ρ ; мы будем нумеровать строки и столбцы этой матрицы начиная с нуля, так что $i, j = 0, 1, 2, \dots$, и опускать обозначения атомных состояний I, J , которые всегда будут одними и теми же. Учитывая определение операторов рождения и уничтожения фотонов, мы имеем:

$$\tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \gamma_{out}(\sqrt{i+1}\sqrt{j+1}\rho_{i+1,j+1} - \frac{i+j}{2}\rho_{ij}) + \gamma_{in}(\sqrt{i}\sqrt{j}\rho_{i-1,j-1} - (\frac{i+j}{2} + 1)\rho_{ij}). \quad (2.16)$$

Мы также имеем $L''_{dt}(\rho) = \rho$, $L''_{dt}(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}$. Оператор U'_{dt} не изменяет диагональных элементов матрицы, а недиагональные он умножает на коэффициент $e^{\pm i\omega(i-j)dt}$. Поскольку коэффициент ω , определяющий фазу, не связан с γ_{in} и γ_{out} из выражения (2.16), это умножение не сможет скомпенсировать в первом порядке по dt изменение ρ_{ij} в (2.16); таким образом, недиагональные элементы матрицы ρ нулевые. Рассмотрим диагональ этой матрицы. Из равенства (2.16) мы имеем:

$$\tilde{\rho}_{ii} = \rho_{ii} + \gamma_{out}((i+1)\rho_{i+1,i+1} - i\rho_{ii}) + \gamma_{in}(i\rho_{i-1,i-1} - (i+1)\rho_{ii}). \quad (2.17)$$

Из уравнения (2.17) мы можем найти рекуррентное уравнение для диагональных элементов, но можно найти их вид и проще. Мы применим к диагонали ρ представление квантовой гидродинамики. Поток вероятности от базисного состояния $|i\rangle\langle i|$ к состоянию $|i+1\rangle\langle i+1|$ есть $(i+1)\rho_{ii}\gamma_{in}$, и обратный поток есть $(i+1)\rho_{i+1,i+1}\gamma_{out}$, из чего мы получаем, что ρ_{ii} пропорционально μ^i , что и требуется.

Подставим теперь выражения для диагональных элементов в выражение (2.17), и найдем $\tilde{\rho}_{ii} = \rho_{ii}$. Так как выбор I, J был произвольным, мы получаем $\rho_{stat} = \mathcal{G}(T)_f \otimes \rho_{at}$, что и требовалось Теорема 1 доказана.

Теорема 2

Если ансамбль состоит из одного атома, то любое термически стационарное состояние имеет вид $\rho_{stat} = a\mathcal{G}(T)_f \otimes (|0\rangle\langle 0| + \mu|1\rangle\langle 1|)_{at}$, где a - нормировочная константа.

Доказательство. Поскольку $[H, \rho_{stat}] = 0$, мы должны рассмотреть спектральное разложение матрицы ρ_{stat} по операторам $|\tilde{0}_n\rangle\langle\tilde{0}_n|$, где $|\tilde{0}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_n\rangle + |1_n\rangle)$, $|\tilde{1}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_n\rangle - |1_n\rangle)$ для базисных состояний $|0_n\rangle = |n+1\rangle_{ph}|0\rangle_{at}$, $|1_n\rangle = |n\rangle_{ph}|1\rangle_{at}$, образующих базис двумерного подпространства, инвариантного относительно гамильтониана Джейнса-Каммингса для одноатомного ансамбля. Тогда мы получаем

$$\rho_{stat} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\tilde{0}_n\rangle\langle\tilde{0}_n| + \nu_n |\tilde{1}_n\rangle\langle\tilde{1}_n|. \quad (2.18)$$

Так как по Теореме 1 $\rho_{stat} = \mathcal{G}(T)_f \otimes \rho_{at}$ и фотонная часть $\mathcal{G}(T)_f$ диагональна, в выражении (2.18) нет слагаемых вида $|0_n\rangle\langle 1_n|$ и $|1_n\rangle\langle 0_n|$, так что $\lambda_n = \nu_n$. Используя определение $\mathcal{G}(T)_f$, мы получим требуемое. Теорема 2 доказана.

2.8 Термические аттракторы для двух атомов

Случай двухатомного ансамбля радикально отличается от рассмотренного одноатомного. Уже для двух атомов термическая стабилизация не сводится к сходимости матрицы плотности к термически стационарному состоянию. Термическая стабилизация для нескольких атомов в общем случае носит динамический характер. Решение $\rho(t)$ уравнения (??), вообще говоря, сходится к аттрактору - замкнутой траектории в операторном пространстве Лиувилля (см. ??). Причина этого - существование темных состояний, которые в случае двух атомов имеют вид синглета $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.

Мы рассмотрим случай нулевой температуры, когда есть только вылет фотонов из полости. Выберем начальное состояние как $\rho(0) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, для $|\Psi\rangle = |vac\rangle_{ph}|\psi\rangle_{at}$ с вакуумным состоянием поля, где $|\psi\rangle = \alpha|s\rangle + \beta|00\rangle$. Как обычно, мы предполагаем, что энергия основного состояния атомов нулевая. Так как в выбранном начальном состоянии фотон не может быть испущен, мы имеем: $\rho(0) = |\alpha|^2|s\rangle\langle s| + e^{-i\omega t}\alpha\bar{\beta}|s\rangle\langle 00| + e^{i\omega t}\bar{\alpha}\beta|00\rangle\langle s| + |\beta|^2|00\rangle\langle 00|$. Это и есть простейшая форма термического аттрактора для двухатомного ансамбля. Для четырех и более атомов аналогичным образом можно построить и более сложные аттракторы (см. [20]).

Интересно, что аттракторы существуют только при нулевой температуре фотонной "ванны", когда отсутствует приток фотонов, поскольку эти аттракторы связаны с темными состояниями атомного ансамбля; для ненулевого притока фотонов из "ванны" в системе будут наблюдаться только термически стационарные состояния.

2.9 Модель Тависа-Каммингса-Хаббарда

Оптическая полость - искусственное устройство, к тому же достаточно сложное; было бы неплохо с помощью него приблизиться к взаимодействию атомов с полем в естественных условиях. Такое приближение можно получить, если допустить возможность движения как фотонов, так и атомов в пространстве, в частности, выход их за пределы полости. Сначала мы попробуем расширить модель Тависа-Каммингса,

взяв несколько полостей, и соединив их оптическим волокном в граф, так что амплитуда перехода фотона из полости i в полость j будет равна $\mu_{i,j}$; мы также будем считать эти числа вещественными и неотрицательными. Таким образом, атомы не могут покидать своих полостей, а фотоны могут путешествовать по оптическим волокнам из полости в полость по всему графу; это модель Тависа-Каммингса-Хаббарда (ТСН). Пусть $H_{ТС}^i$ обозначает гамильтониан Тависа -Каммингса для полости с номером $i = 1, 2, \dots, m$. Будем также снабжать нижними индексами номера полости соответствующие ей полевые операторы $a_i^{(+)}$.

Гамильтониан модели ТСН имеет вид

$$H_{ТСН} = \sum_{i=1}^m H_{ТС}^i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mu_{ij} (a_i^+ a_j + a_i a_j^+). \quad (2.19)$$

Эта модель ближе к реальности, чем однополостная, так как здесь уже допускается возможность для фотонов стать различимыми, оказавшись в разных полостях.

В модели ТСН также, как и для однополостного случая, имеет место эффект квантового бутылочного горлышка - см. рисунок 2.4.

2.10 Запутывающий гейт в модели JCH

Квантовый компьютер представляет собой вторжение квантовой теории в область сложных процессов, где действие ее основных законов пока не изучено. Поэтому конструирование наиболее простых схем таких вычислений, в которых квантовые законы проявлялись бы как можно яснее, является актуальной задачей. Темное место здесь - декогерентность, возникающая из-за взаимодействия зарядов и поля, кванты которого тесно связывают квантовый компьютер с окружением. Это делает необходимым учет и контроль, или даже явное использование фотонов в квантовых протоколах.

Фотоны как носители информации дают возможность использовать линейные оптические приборы для реализации однокубитных гейтов, но конструирование запутывающих операций трудно, так как фотоны непосредственно не взаимодействуют друг с другом. Есть популярная KLM- схема (см. [25]), где используются измерения в качестве эрзаца взаимодействия, и ее усовершенствование [26] с телепортацией (см. [27]), значительно повышающее ее эффективность, а также ряд вариантов этой схемы для атомов (см., например, [28]). Однако использование классических вероятностных схем при практической реализации предъявляет повышенные требования к эффективности, по крайней мере, теоретической, квантовых гейтов на единичных частицах. Использование классической вероятности затеняет главный вопрос квантового компьютера: как когерентность работает для сложных систем из разных частиц?

Здесь больше подходят наиболее первопринципные методы, главным из которых являются оптические полости с несколькими атомами, взаимодействие которых с одномодовым полем четко описывается из первых принципов (о возможностях данного типа устройств см., например, [29]). Так, гейт CNOT был реализован с использованием внешних - колебательных - степеней свободы атома (см. [30]). Однако суть

квантового компьютеринга - в когерентном поведении не отдельного кубита, а в масштабировании фейнмановского квантового процессора, реализующего теоретические возможности унитарной динамики во всем гильбертовом пространстве состояний, дающее, например, алгоритм Гровера [11] на том же оборудовании, что и алгоритм Шора [5]. Использование внешних факторов для демонстрации динамики отдельных атомов и поля полезно именно для отдельных атомов, но вносимые неизбежные помехи наверняка скажутся при масштабировании.

Поэтому ценность представляют схемы реализации гейтов, использующие минимальные средства, которые хорошо описываются из первых принципов. Одна из таких схем предложена в статье Х.Азумы [31], где в качестве кубитов используются двух-рельсовые состояния единичных фотонов. В этой схеме взаимодействие фотонов с атомами используется лишь для совершения запутывающего преобразования $C\text{Sign}$, для которого требуется две оптические полости; необходимы также два светоделителя и фазовращатели.

Мы опишем упрощение схемы Азумы, где используется только одна полость, а светоделители заменены временным сдвигом для фотонов, поступающих в нее. Логическими кубитами у нас будут асинхронные состояния атомов в рабиевских осцилляциях. Эту схему можно переделать для чисто фотонных носителей, со временным сдвигом, определяющим значение кубита. Однако атомы как носители информации обладают тем преимуществом, что их гораздо легче контролировать, как и испускаемые ими фотоны. Достоинство предлагаемой схемы в ее простоте. Недостаток, тот же, что и в схеме [31] - зависимость от временной точности срабатывания ячейки Поккельса или ее аналога, время работы которой надо сделать существенно меньше времени рабиевской осцилляции атома в полости.

По техническим причинам мы будем реализовывать гейт $coC\text{Sign} : |x, y\rangle \rightarrow (-1)^{x(y\oplus 1)}|x, y\rangle$, меняющий знак при единственном состоянии $|10\rangle$, родственной гейту $C\text{Sign}$, который реализован в [31]; разницы нет никакой, так как $coC\text{Sign} = C\text{Sign}\sigma_x(y)$, а однокубитные гейты реализуются линейными оптическими устройствами.

2.11 Расчет фазовых сдвигов

Ядро данной схемы - оптическая полость с одним двухуровневым атомом с энергетической щелью $\hbar\omega$ между основным $|0\rangle$ и возбужденным $|1\rangle$ уровнями, где ω совпадает с частотой фотона определенной моды, удерживаемого в полости. Константа взаимодействия g между атомом и полем предполагается малой: $g/\hbar\omega \ll 1$ (практически, это отношение должно быть не больше 10^{-3}) для возможности применения RWA приближения, в котором гамильтониан Джейнса-Каммингса системы "атом+поле" ([22]) имеет вид

$$H = H_{JC} = H_0 + H_{int}; \quad H_0 = \hbar\omega a^+ a + \hbar\omega \sigma^+ \sigma, \quad H_{int} = g(\alpha^+ \sigma + a \sigma^+), \quad (2.20)$$

где a, a^+ - операторы уничтожения и рождения фотона, σ, σ^+ - релаксации и возбуждения атома. Будем записывать базисные состояния атома и поля в виде $|n\rangle_{ph}|m\rangle_{at}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ - число фотонов в полости, $m = 0, 1$ - число атомных возбуждений. У нас будет $n = 0, 1, 2$. Мы будем рассматривать несколько полостей, и снабжать операторы

полости i нижним индексом i , так что общий гамильтониан будет равен сумме $\sum_i H_i$; взаимодействие атомов с полем H_{int} во всех областях будет тогда равно, соответственно, сумме $\sum_i H_{int\ i}$. Гамильтониан в ходе выполнения гейта *coCSign* будет меняться: к его слагаемому H_{int} будет добавляться слагаемое вида $H_{jump} = \nu(a_i a_j^+ + a_j a_i^+)$, означающее переход фотона из полости i в полость j и наоборот, но энергия независимых атомов и поля H_0 не изменится (модель Джейнса-Каммингса-Хаббарда JCH). Поэтому набег фазы, связанный с H_0 , будет общим для всех состояний, и его можно игнорировать. Далее мы будем считать набег фазы относительно либо тождественного оператора I , либо относительно σ_x , так как все операции, рассмотренные ниже, сводятся либо к первой, либо ко второй с изменением фазы, так что набег фазы при применении, например, $-i\sigma_x$ составит $-\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\tau_1 = \pi\hbar/g$, $\tau_2 = \pi\hbar/g\sqrt{2}$ - периоды рабиевских осцилляций для общей энергии $\hbar\omega$ и $2\hbar\omega$ соответственно. Операторы $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, индуцируемые эволюцией в важные моменты времени, будут зависеть от общей энергии полости. Если она равна $\hbar\omega$, в базисе $|\phi_0\rangle = |1\rangle_{ph}|0\rangle_{at}$, $|\phi_1\rangle = |0\rangle_{ph}|1\rangle_{at}$, мы имеем:

$$U_{\tau_1/2} = -i\sigma_x, \quad U_{\tau_1} = -I, \quad U_{2\tau_1} = I, \quad (2.21)$$

где σ_x - матрица Паули, и аналогичные соотношения с заменой τ_1 на τ_2 при общей энергии полости $2\hbar\omega$.

При перемещении фотона из полости j в полость i и наоборот, что реализуется одновременным включением ячеек Поккельса или подобных им устройств в данных полостях, реализуется добавка H_{jump} к взаимодействию H_{int} , которая при отсутствии в полостях атомов реализует в точности ту же динамику, что и рабиевские осцилляции, но с периодом $\tau_{jump} = \pi\hbar/\nu_{i,j}$. Мы будем считать, что $\nu \gg g$, так что возможно перемещение фотона из полости в полость так, чтобы атом вообще не влиял на этот процесс, так что набег фаз можно считать по формулам, аналогичным (2.21). Как отмечено в работе [31] это трудно реализовать в эксперименте, однако есть основания считать это технической трудностью. В случае выполнения этого условия набег фазы при операторе σ_x , примененной к фотонам двух полостей составит, так же как и для половины рабиевской осцилляции, $-\pi/2$.

В силу несоизмеримости периодов рабиевских осцилляций τ_1 и τ_2 мы можем выбрать такие натуральные числа n_1 и n_2 , что будет выполняться с высокой точностью приближенное равенство

$$2n_2\tau_2 \approx 2n_1\tau_1 + \frac{\tau_1}{2}, \quad (2.22)$$

которое и будет основой для нелинейного фазового сдвига, необходимого для реализации *coCSing*.

2.12 Реализация coCSign

Состояние кубита $|0\rangle$ реализуется в нашей модели как состояние оптической полости вида $|0\rangle_{ph}|1\rangle_{at}$, а состояние кубита $|1\rangle$ - как $|1\rangle_{ph}|0\rangle_{at}$. Таким образом, для состояния $|10\rangle$, которому требуется инвертировать фазу, имеет вид $|10\rangle_{ph}|01\rangle_{at}$, где первый фотонный кубит относится к полости x , а второй - к полости y . Заметим, что через

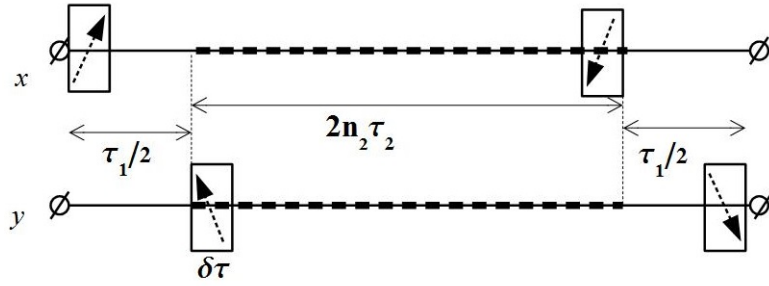


Рис. 2.6: Последовательность операций при реализации гейта coCSign : $|x, y\rangle \rightarrow (-1)^{x(y\oplus 1)}|x, y\rangle$ на асинхронных атомных возбуждениях в оптических полостях, $\delta\tau = \tau_{\text{jump}}/2$

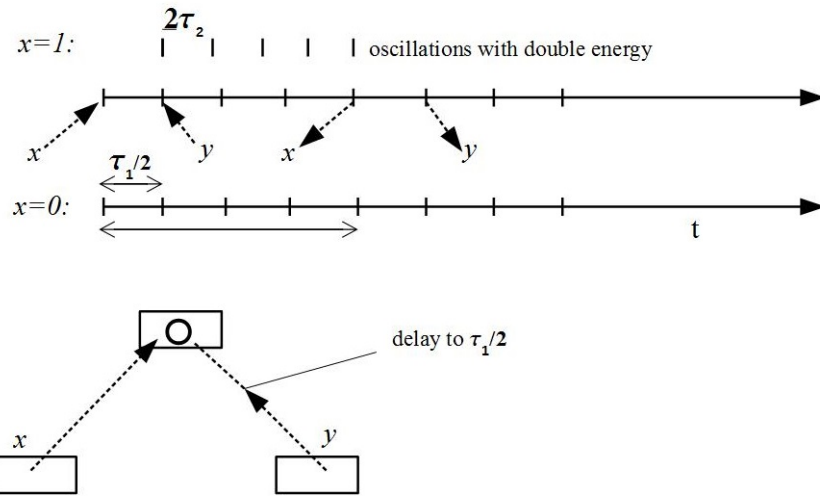


Рис. 2.7: Реализация гейта coCSign

время $\tau_1/2$ ноль и единица меняются местами с набегом фазы, который входит в H_0 , и потому игнорируется.

Последовательность операций, реализующих coCSign , изображена на рисунке 2.6, а участвующие полости - на рисунке 2.7. Сначала мы запускаем во вспомогательную полость с атомом в основном состоянии и вакуумным состоянием поля фотон из полости x , затем, с задержкой $\tau_1/2$ - фотон из полости y , затем, через время $2n_2\tau_2$, перемещаем фотон из вспомогательной полости в полость x , затем, через время $\tau_1/2$ перемещаем фотон из вспомогательной полости в полость y . Из нашего выбора времен перемещений фотонов вытекает, что в данные моменты в участвующих полостях будет либо один фотон, либо ни одного, поэтому включение ячеек Пококельса на малом временном отрезке $\delta\tau = \pi\hbar/2\nu \ll \tau_1$ даст именно перемещение фотонов.

Из предыдущих расчетов следует, что при энергии центральной полости $\hbar\omega$ (начальные состояния $|00\rangle, |11\rangle$) набег фазы при переносе фотона туда и обратно составит $-\pi$, а во взаимодействии с атомом $-\pi$, так что суммарный набег фазы будет нулевой, как и в случае нулевой энергии центральной полости (начальное состояние

$|01\rangle$). Для энергии $2\hbar\omega$ - в случае $x = 1, y = 0$ перенос двух фотонов даст нуль, а взаимодействие даст $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$, что и требовалось.

В статье [32] приведен расчет, из которого следует, что для достижения удовлетворительной точности подобных запутывающих гейтов на нелинейности в полостях достаточно взять числа несоизмеримых периодов n_1, n_2 , не превосходящие нескольких десятков, что соответствует числу наблюдаемых рабиевских осцилляций в оптических полостях.

2.13 Реализация однокубитных гейтов

Для квантового вычисления, кроме запутывающего гейта coCSign , необходимы также однокубитные гейты. Мы покажем, как можно реализовать два гейта: вращатель фазы $|x\rangle \rightarrow e^{i\phi x}|x\rangle$ и оператор Адамара $H : |x\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^x|1\rangle)$.

Во-первых, заметим, что определенные нами логические кубиты различаются только временем появления явного фотона в полости. Пусть к полости подсоединены два волновода, 1 и 2. Используя быстрое включение и выключение ячейки Поккельса, как и выше, мы можем направить фотон по волноводу 1, в случае, если логический кубит равен нулю, и по волноводу 2, если он равен единице.

Фазовращатель изменяет фазу логического кубита, наращивая ее на угол ϕ , в том и только в том случае, когда он равен единице. Для такого изменения фазы достаточно удлинить волновод 2, в который попадет фотон, если логический кубит равен единице. Излишек длины наматывается на катушку, так что на выходе у нас снова будут те же фотоны, но сдвиг фазы по волноводу 2 будет равен ϕ . Так как период рабиевских осцилляций τ значительно превосходит длину волны фотона, такое удлинение пути фотона во втором волноводе никак не скажется на определении логических кубитов.

Теперь перейдем к гейту Адамара H . Для его реализации мы используем линейный светоделитель, изображенный на рисунке 2.8. Это устройство реализует преобразование фотонов в волноводах 1 и 2 вида:

$$|n_1 m_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}(a_1^+)^n(a_2^+)^m|0_1 0_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n!m!}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+ + a_2^+)\right]^n\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+ - a_2^+)\right]^m|0_1 0_2\rangle, \quad (2.23)$$

где нижний индекс обозначает номер волновода. При $n = 1, m = 0$ или $n = 0, m = 1$, то есть для одного логического кубита, это преобразование в точности даст оператор Адамара.

Таким образом, однокубитные гейты, необходимые для реализации, например, алгоритма Гровера, можно сделать на оптических полостях, в рамках модели Джейнса-Каммингса-Хаббарда. Основная трудность - в скорости срабатывания ячейки Поккельса, что представляется технически преодолимым делом. Достоинство предложенной схемы реализации гейтов - в ее простоте и возможности точного следования теоретической модели ЖСН, что, несмотря на упомянутую техническую трудность

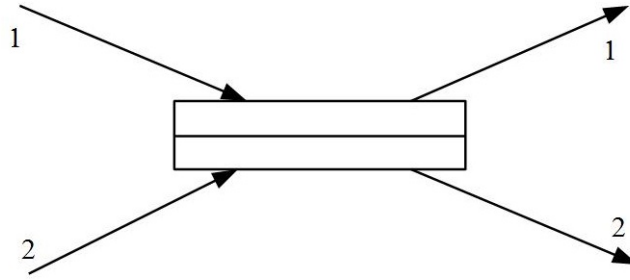


Рис. 2.8: Светоделитель.

внушает оптимизм в плане масштабируемости и сравнения теории квантового компьютера с экспериментами на большом числе кубитов.

2.14 Оптическая проводимость графов

Если в полостях нет атомов, то мы получаем граф G , в вершинах которого находятся полости, а ребрами являются оптические волокна - волноводы, по которым из вершины в вершину могут перемещаться фотоны. Такая модель является очень грубым представлением движения отдельного фотона в пространстве (с ограничениями, отмеченными в первой главе), так что распределение амплитуд его нахождения в разных полостях можно считать его вектором состояния.

Пусть все ребра обладают одинаковой проводимостью μ . Если в системе есть только один фотон, мы можем нумеровать базисные состояния номером той вершины, где он находится $|i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, N$. Будем считать 1 - начальной, а N - конечной вершиной. Определим понятие оптической проводимости графа с фиксацией начала и конца. Для этого введем дополнительную полость - сток, так же, как и выше, и концевую вершину соединим волноводом со стоком, так что оператор $A_1 = a_N a_{sink}^+$ будет представлять вытекание фотона из последней полости в сток (sink). Физически сток будет не полостью, а детектором, соединенным с концевой полостью оптоволоконном. Задавая начальное состояние в виде нахождения фотона в начальной полости $|1\rangle$, мы, решая квантовое основное уравнение с таким фактором декогерентности, получим, как и выше, матрицу плотности $\rho(t)$.

Вероятность того, что фотон вылетел из последней полости в детектор к моменту времени t находится по формуле $P(t) = \langle sink | \rho | sink \rangle$, и является функцией распределения времени щелчка детектора. Функция $P(t)$ называется оптической проводимостью графа G при данной фиксации начальной и конечной вершин. Данная функция зависит не только от фиксации начала и конца графа G , но и от интенсивности вылета фотона из последней полости в детектор γ_{out} , которую мы будем предполагать ненулевой.

Правдоподобной кажется следующая

Гипотеза. Если оптическая проводимость двух графов при некоторых фикс-

сацциял начал и концов одинакова при некоторой интенсивности стока γ_{out} , то эти графы изоморфны.

Данная гипотеза не доказана. Однако численное моделирование ее подтверждает. Практический алгоритм, определяющий изоморфизм на основании этой гипотезы, описан в следующем параграфе.

2.14.1 Оптическое определение изоморфизма графов

Пусть G_1 и G_2 - два графа, оба с выделенными началами 0_1 и 0_2 , и концами $(N-1)_1$, $(N-1)_2$ соответственно. Объединив эти графы и отождествив их концы, мы получим большой граф \mathcal{G} , который обозначим через (G_1G_2) . Его начальными вершинами мы будем считать 0_1 и 0_2 , а концом - отождествленные концы графов $(N-1)_1$, $(N-1)_2$.

Мы зададим начальное состояние фотона в графе (G_1G_2) в виде синглетного состояния, распределенного на двух начальных вершинах: $|\Psi(0)\rangle = |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle - |0_2\rangle)$, и дадим системе эволюционировать, детектируя фотон, вылетающий из конца графа (G_1G_2) также, как и выше.

Если проводимость графов G_1 и G_2 одинакова, мы будем иметь для графа (G_1G_2) с таким начальным условием $P(t) = 0$ для любого t , так как каждая порция амплитуды, пришедшая к концу графа (G_1G_2) через его подграф G_1 , сократится с такой же порцией амплитуды, пришедшей через подграф G_2 . И наоборот, если проводимость исходных графов разная, $P(t)$ будет ненулевой неубывающей функцией.

Напротив, если проводимость исходных графов различна, амплитуда конечного состояния $|N-1\rangle$ будет в какой-то момент ненулевой, и $P(t)$ будет отличной от нуля.

Таким образом, оптический алгоритм определения изоморфизма выглядит так. Мы выбираем какое-то начало и конец для первого графа, а затем перебираем все возможные начала и концы для второго, всякий раз сравнивая проводимости графов с данным выбором по изложенной схеме. Если для какого-то выбора окажется, что проводимость совпадает, то, в случае справедливости основной Гипотезы, графы G_1 и G_2 изоморфны.

Если бы чувствительность детектора была абсолютной и наша гипотеза оказалась справедливой, мы получили бы полиномиальный алгоритм распознавания изоморфизма графов на квантовом компьютере, так как перебор всевозможных пар начал и концов графов G_1 и G_2 происходит за время порядка четвертой степени от размера графов. Однако вопрос о гипотезе открыт, и чувствительность детектора ограничена. Таким образом, данный алгоритм имеет статус только практического метода распознавания изоморфизма, возможно, в его частичном виде.

2.14.2 Оптическая полупроводимость

Для любого графа G можно исследовать не только равенство нулю функции проводимости $P(t)$, но и ее поведение при $t \rightarrow \infty$. Назовем проводимость данного графа

полной, если $P(t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$), и неполной, если $P(t) \rightarrow a$, ($t \rightarrow \infty$), $0 < a < 1$. Граф с неполной проводимостью можно назвать графом-полупроводником; в этом случае число a будет его показателем полупроводимости.

В качестве примера графа-полупроводника рассмотрим снова граф $(G_1 G_2)$, построенный в предыдущем параграфе отождествлением концов двух графов G_1 и G_2 в том случае, когда эти графы изоморфны, причем при изоморфизме выбранные начало и конец одного переходят в выбранные начало и конец другого соответственно.

Зададим начальное состояние по другому: $|\Psi(0)\rangle = |0_1\rangle$. Тогда, поскольку графы G_1 и G_2 изоморфны, при таком задании начального состояния проводимость $P(t)$ на бесконечности будет сходиться к $1/2$. Действительно, выбранное начальное состояние $|0_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|s\rangle + |t\rangle)$, где синглетное и триплетное состояния суть $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle - |0_2\rangle)$, $|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle + |0_2\rangle)$. Триплетное состояние $|t\rangle$ дает полный сток из-за симметрии амплитуд возникающих состояний, в то время как синглет $|s\rangle$ дает полное сокращение амплитуды в общем конце графов, опять таки в силу симметрии. Таким образом, для таких графов \mathcal{G} , склеенных из двух одинаковых "половинок", показатель полупроводимости равен $1/2$.

Интересно, что если в графе G_2 поменять местами начало и конец, и только затем произвести склейку концов графов, показатель полупроводимости a результирующего графа \mathcal{G} будет выше, но не станет единичным: $1/2 < a < 1$. Таким образом, показатель полупроводимости может служить своеобразным индикатором наличия изоморфных подграфов в исходном графе.

2.15 Коллективные осцилляции

Многоатомные ансамбли - более содержательный объект для исследований, чем одноатомные. Если атомы одинаковы, то идентичными будут и испущенные ими фотоны, а фотоны "поддерживают" друг друга при одновременном испускании, из-за чего осцилляции в многоатомных ансамблях могут быть более устойчивыми, чем в одноатомных.

Для много-атомных ансамблей можно ввести естественное обобщение атомных состояний вида $(\lambda|01\rangle + \mu|10\rangle)_{at}$ - для случая, когда амплитуда распределена между атомами равномерно.

Пусть $B = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество всех атомов, $J(B)$ есть множество классических бинарных состояний атомов из множества B . Определим равномерное состояние атомов из множества B как

$$\{|k_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_n^k}} \sum_{j \in J(B) \ 1(j)=k} |j\rangle, \quad (2.24)$$

где $1(j)$ есть вес Хамминга бинарного кортежа j , то есть число единиц в нем. Заметим, что равномерные состояния взаимно ортогональны в силу того, что у них нет общих базисных компонент. Для символов $\{, \}, \succ, \prec$ примем дираковские правила, аналогичные правилам обращения с символами $|, \rangle, \langle$.

Пусть L_{eq}^B - равномерное подпространство, то есть линейная оболочка состояний вида $|p\rangle\{k_B \succ$ для всех $k = 0, 1, \dots, |B|$; $p = 0, 1, \dots$, где $|p\rangle$ - фоковское состояние фотонов. Рассмотрим ограничение гамильтониана H_{TC} на L_{eq}^B , которое обозначим через \tilde{H}_{TC}^B . Тогда можно записать этот гамильтониан в новом базисе, состоящем из равномерных состояний. Эта матрица будет иметь вид

$$(\tilde{H}_{i_p, i_B; j_p, j_B}^B) = (\prec i_B \rangle \langle i_p | H_{TC} | j_p \rangle \{ j_B \succ),$$

где i_p, i_B - начальное число фотонов и атомных возбуждений, j_p, j_B - конечное. Для вычисления ее элементов заметим сначала, что ненулевые члены матрицы должны удовлетворять равенствам

$$i_p - j_p = i_B - j_B = \pm 1,$$

первое из которых есть закон сохранения энергии, а второе вытекает из вида гамильтониана H_{TC} . Ненулевые элементы матрицы удобно выразить через числа

$$p = \min\{i_p, j_p\}, \quad b = \min\{i_B, j_B\}.$$

Тогда имеем

$$\tilde{H}_{i_p, i_B; j_p, j_B}^B = \begin{cases} h\omega(p + b), & \text{если } i_B = j_B, \quad i_p = j_p, \\ g(n - b) \sqrt{\frac{p+1}{C_n^b C_n^{b+1}}}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Первое равенство - для диагональных элементов, есть просто энергия данного состояния. Второе получено так. Коэффициент g есть сила взаимодействия атомов с полем, $\sqrt{p+1}$ - эффект тождественности фотонов (в операторах рождения-уничтожения), произведение биномиальных коэффициентов в знаменателе берется из нормировочных констант в определении равномерных состояний (2.24), множитель $(n-b)$ - число слагаемых в сумме, равное числу возможных атомов, возбуждение которых снимается при испускании фотона в рассматриваемом процессе.

Используя n - атомную систему, можно получить искусственный "атом" с $n + 1$ уровнями: $\{0 \succ, \{1 \succ, \{2 \succ, \dots, \{n \succ$, так, что энергетические щели между двумя соседними уровнями будут одинаковыми: $E_k - E_{k-1} = \hbar\omega$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Для равномерных состояний имеет место аналог осцилляций Раби - коллективные осцилляции. Пусть $n = 2k$ четно. Разобьем атомы на две группы, и будем обозначать первую группу нижним индексом 1, а вторую - нижним индексом 2. Рассмотрим два базисных состояния: $|\psi_1\rangle = |0\rangle_{ph} |00\dots 0\rangle_1 |11\dots 1\rangle_2$ и $|\psi_2\rangle = |0\rangle_{ph} |11\dots 1\rangle_1 |00\dots 0\rangle_2$. В этих состояниях нет свободных фотонов; в первом первая группа атомов в основном состоянии, а вторая - в возбужденном, а во втором - наоборот. Если начать эволюцию с одного из этих состояний, например, с $|\psi_1\rangle$, оно сразу же превратится в суперпозицию, атомная часть каждого члена которой является равномерным состоянием атомов, причем здесь будут присутствовать все равномерные состояния. Однако через определенный промежуток времени вся амплитуда сконцентрируется на втором состоянии - на $|\psi_2\rangle$, затем все повторится, и т.д., то есть мы получим коллективный аналог рабиевских осцилляций.

Однако характер коллективных осцилляций будет непохож на рабиевские для одного атома. Пики амплитуды на наших двух состояниях будут с ростом n становиться все более и более резкими, и характер осцилляций, таким образом, будет далек от

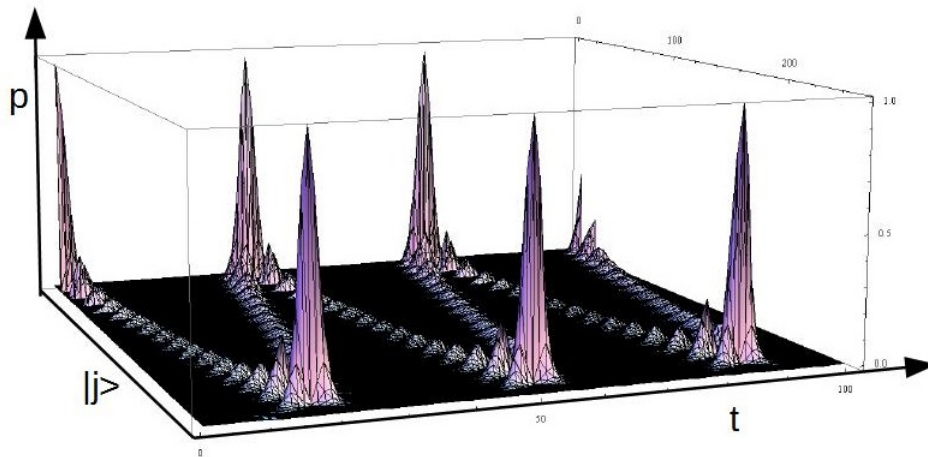


Рис. 2.9: Коллективные осцилляции для системы 16+16. Острота пиков при переходе от возбуждения одной группы атомов к другой

синусоидального вида одноатомных осцилляций (см. рисунок 2.9). Аналогичный характер будут иметь осцилляции, даже если две группы атомов расположены в разных полостях, связанных оптическим волокном.

Устойчивость состояний типа $|\psi_{1,2}\rangle$ говорит о том, что две группы атомов могут взаимно и качественно поддерживать одинаковый динамический сценарий, даже будучи удаленными друг от друга. Причина такого поведения заключается в интерференции амплитуд; именно интерференция с участием фотонов делает возможным такую поддержку на расстоянии. Дистанционная поддержка динамических сценариев, при которой фотоны, испущенные одной группой, "находят" другую группу, готовую их принять, происходит из-за того, что для всех иных состояний амплитуда оказывается распределенной по их большому числу, что резко снижает вероятность нахождения системы атомов в этих "посторонних" состояниях. Это свойство ценно само по себе, так как оно дает надежду избавиться от полостей как таковых, представляя пустое пространство в виде набора множества полостей, соединенных оптоволоконными волноводами, проводимость которых зависит от расстояния между полостями (см. главу 1).

Отметим, что получение с помощью таких массовых осцилляций качественных гейтов типа coCSign встретится с трудностью, отчасти именно из-за остроты пиков: для улавливания момента концентрации амплитуды нужна слишком высокая скорость срабатывания оптических элементов, как мы это видели выше.

2.15.1 Эффект DAT

Модель Тависа-Каммингса может применяться не только к вакуумным оптическим полостям, но и к квантовым точкам, в которых участвующие непосредственно в модели атомы окружены множеством других атомов, которые явно не участвуют в этой модели, но создают эффект теплового воздействия на атомы, входящие в модель. Термическое воздействие можно учесть, вводя в модель термические фононы - кванты колебаний среды, однако этот путь очень затратен по вычислительным

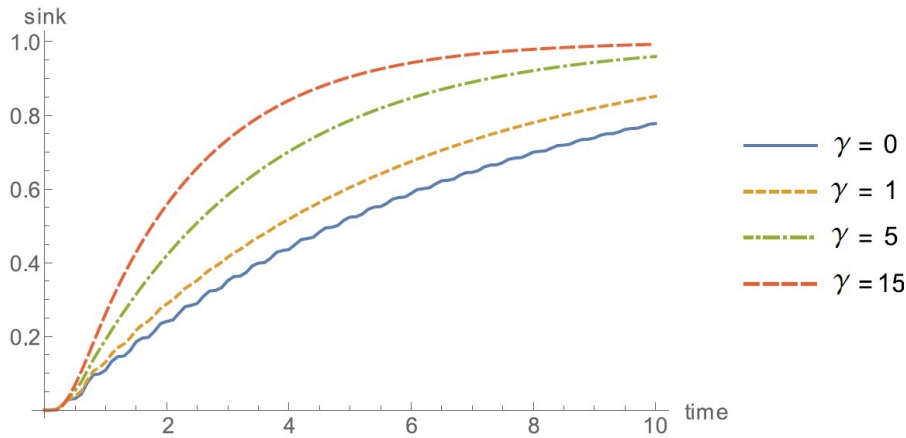


Рис. 2.10: Изменение наполнения стока со временем, иллюстрирующая эффект DAT для 2 полостей по 1 атому в каждой. $\nu_{12} = 2, g = 8, \gamma_{out}^{(2)} = 15$. Влияние термического шума одинаково для атомов в обеих полостях: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Повышение уровня шума (температуры на частоте резонансного перехода ведет к увеличению проводимости, что удивительно. (Рисунок взят из работы [20].)

ресурсам. Иногда можно отразить термическое воздействие среды на атомы в фиксированной полости, не расширяя саму модель введением новых состояний, а добавив новый, термический фактор декогерентности - $A_{term} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \sigma_i^+ \sigma_i$, где γ_i - интенсивность действия термического фактора на атом i .

Рассмотрим цепочку полостей, связанных оптическим волокном, с фиксированным началом и концом, где, как обычно, из конечной полости имеется необратимый сток фотонов, на атомы каждой полости j действует термический фактор декогерентности A_{term}^j , в котором интенсивности γ_i^j зависят не только от номера атома i , но и от номера полости j .

Проводимость такой цепочки полостей определяется так же, как и выше, по скорости наполнения стока при начальном состоянии, в котором единственный фотон находится в первой полости, а все атомы - в основном состоянии. Численное моделирование показывает наличие контр-интуитивного эффекта роста проводимости при некотором повышении интенсивности теплового воздействия на атомы, то есть при увеличении γ_i для всех или некоторых полостей, входящих в цепочку. Этот эффект называется dephasing assisted transport (DAT, см. [33]); он имеет место, например, в светособирательном комплексе зеленых серных бактерий (так называемый FMO-комплекс, см. [34]).

Эффект DAT численно моделируется с помощью квантового основного уравнения для цепочки из двух полостей с одним атомом в каждой, результат приведен на рисунке 2.10.

2.16 Системы много-уровневых атомов

Рассмотрим обобщение модели Тависа-Каммингса на d -уровневые атомы. Модифицированный на случай d -уровневых атомов гамильтониан Тависа-Каммингса для n атомов с энергиями g_i^j взаимодействия с полем выделенной моды i имеет вид

$$\begin{aligned} H_{TC}^i &= \hbar\omega a_i^+ a_i + (a_i^+ + a_i) \sum_{j=1}^n g_i^j (\sigma_{ji}^+ + \sigma_{ji}), \\ H_{TC}^{i,RWA} &= \hbar\omega a_i^+ a_i + g_i^j (a_i^+ \bar{\sigma}_i + a_i \bar{\sigma}_i^+), \quad \bar{\sigma}_i = \sum_{j=1}^n g_i^j \sigma_{ji}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где RWA-приближение справедливо при $g_i^j/\hbar\omega \ll 1$, верхним символом "+" обозначено сопряжение операторов. Здесь a_i, a_i^+ - полевые операторы уничтожения и рождения фотона моды i , $\sigma_{ji}, \sigma_{ji}^+$ - атомные операторы релаксации и возбуждения атома j , соответствующие моде i , которые определяются естественным образом.

Пусть для ансамбля A , состоящего из d одинаковых d -уровневых атомов, различающихся только энергиями взаимодействия с модами поля, определен граф G возможных разрешенных переходов между уровнями для каждого j -го атома, $j = 1, 2, \dots, d$. Вершины G соответствуют уровням энергии, ребра - разрешенным переходам между ними. Тогда G задает набор всевозможных мод J_G , с которыми может взаимодействовать каждый атом. Многомодовый гамильтониан, соответствующий графу G , имеет вид

$$H_{TC}^G = \sum_{i \in J_G} H_{TC}^i, \quad H_{TC}^{G,RWA} = \sum_{i \in J_G} H_{TC}^{i,RWA}. \quad (2.27)$$

Введем обозначение $\bar{\sigma}_G = \sum_{i \in J_G} \bar{\sigma}_i$. Тогда подпространство темных атомных состояний для ансамбля с возможными переходами G есть $Ker(\bar{\sigma}_G^+ + \bar{\sigma}_G)$ и $Ker(\bar{\sigma}_G)$ в точной модели и в RWA приближении соответственно. (Заметим, что некоторые моды могут допускать RWA приближение, тогда как другие - нет, к разным атомам применимость RWA также может быть различной; соответствующие модификации определений ясны из приведенных; мы рассматриваем только случай применимости этого приближения ко всем модам и атомам одновременно.)

Через $g^j(r)$ обозначим амплитуду перехода по ребру r , соединяющему пару состояний в графе G для атома j .

Сделаем граф G ориентированным, задав ориентацию любого ребра по направлению к уменьшению энергии атомного состояния. Зафиксировав номер атома $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, пометим в графе G ребра r числами $g^j(r)$. Получится n графов G^j , изоморфных G , для каждого атома - свой. Предположим, что каждой паре "атом j , состояние i " можно приписать положительный вес $w(j, i)$, так что для любой пары j, j' атомов отношение $g^j(r)/g^{j'}(r) = w(j', i_{in})/w(j, i_{in}) = w(j', i_{fin})/w(j, i_{fin})$ для любого ребра r с началом i_{in} и концом i_{fin} .

Рассмотрим состояние атомов

$$|D_{G,A}\rangle = \sum_{\pi \in S_d} (-1)^{\sigma(\pi)} w(1, \pi(1)) w(2, \pi(2)) \dots w(d, \pi(d)) |\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(d)\rangle, \quad (2.28)$$

где π пробегает все перестановки на множестве атомов $1, 2, \dots, d$, а $\sigma(\pi)$ обозначает четность перестановки π . Состояние $|D_{G,A}\rangle$ называется G, A - мультисинглетом. Мультисинглет называется равновесным, если все веса $w(j, i)$ равны единице. Мультисинглет всегда является темным в RWA, а равновесный мультисинглет - темным для точного гамильтониана. Чтобы показать это, рассмотрим следующий пример.

Пример. Для $d = 2$ состояние (2.28) примет вид

$$g^1|01\rangle - g^2|10\rangle \quad (2.29)$$

с точностью до нормировки; это состояние темное в RWA. Из определения весов $w(j, i)$ следует, что сумма двух слагаемых из (2.28), отличающихся только перестановкой состояний одной пары атомов, будут с точностью до коэффициента иметь вид (2.29). С другой стороны, состояние (2.29) будет темным для точного гамильтониана тогда и только тогда, когда $g^1 = g^2$.

Подграф $G' \subseteq G$ называется полным, если вместе с любой своей вершиной он содержит все вершины, соединенные с ней нисходящим ребром, вместе с этим ребром. Набор графов G_1, G_2, \dots, G_r графа G назовем покрытием, если он состоит из полных подграфов и их объединение дает G . Покрытие точное, если любой G_i , $i = 1, 2, \dots, r$ является компонентой связности графа G .

Для ансамбля n d -уровневых атомов в свете работы [24] правдоподобной является следующая гипотеза о явном виде темных состояний.

Гипотеза.

1) Любое темное состояние в гамильтониане $H_{TC}^{G,RWA}$ есть линейная комбинация тензорных произведений

G_i, A_i - мультисинглетов для некоторых покрытий $\{G_i\}$ графа G и разбиений множества всех атомов A на подмножества A_i .

2) Темные состояния для точного гамильтониана H_{TC}^G являются в точности линейными комбинациями равновесных

G_i, A_i - мультисинглетов для точных покрытий $\{G_i\}$ графа G и соответствующих разбиений A на подмножества A_i .

В частности, из этого следует, что при связном графе G темные состояния в точной модели бывают лишь для ансамблей с числом атомов, кратным d . Данная гипотеза строго доказана только для $d = 2$ в работе [35]. Уже для $d = 3$ данная гипотеза только проверена на суперкомпьютере до нескольких десятков атомов.

В ансамбле разнородных атомов, как правило, нет совпадающих частот переходов. Однако в квантовых точках, где "атомы" можно, фактически, формировать искусственно, можно добиться и совпадения частот некоторых переходов в спектрах неодинаковых структур; в это случае можно исследовать получающиеся темные состояния.

Например, для трехатомного ансамбля, состоящего из двух V - атомов и одного λ - атома, изображенного на рисунке 2.11, RWA-темное подпространство будет иметь размерность 7 и один из его базисов выглядит так:

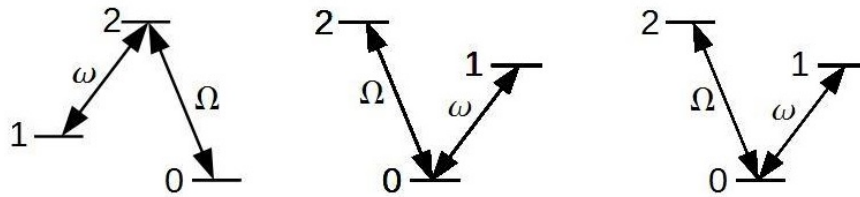


Рис. 2.11: Ансамбль трех разных атомов: два v - типа и один λ - типа. Переходы подобраны с одинаковыми для всех атомов энергиями обеих мод $\hbar\Omega$, $\hbar\omega$.

$|120\rangle - |102\rangle$, $|200\rangle - |101\rangle - |001\rangle$, $|200\rangle - |110\rangle - |002\rangle$, $|000\rangle$, $|002\rangle - |020\rangle$, $|100\rangle$, $|110\rangle - |101\rangle$. Здесь последовательность атомных состояний - как у атомов на рисунке.

2.17 Оптический отбор темных состояний

Мы объясним метод оптического отбора на примере ансамбля, состоящего из двух двух-уровневых атомов. Будем обозначать базисные состояния системы атомов и поля через $|n\rangle_{ph}|m_1 m_2\rangle_{at}$, где n - число фотонов в резонаторе, m_1, m_2 - числа возбуждения первого и второго атомов: 0- основное состояние, 1- возбужденное. Схема отбора состоит из последовательных шагов отбора, которая начинается с заранее подготовленного состояния поля и атомов $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_{ph}|\Phi_0\rangle_{at}$, где $|\Phi_0\rangle_{at} = \alpha|00\rangle + \beta|s\rangle$, $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ - двухатомный синглет, $\alpha|00\rangle + \beta|s\rangle$ - произвольное состояние двух-атомной системы, которое можно получить, выждав необходимое время для испускания фотона двух-атомной системой. Например, состояние атомного ансамбля $|01\rangle$ можно представить как $|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|t\rangle + |s\rangle)$, где $|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ - триплетное состояние, остальные два триплета имеют вид $|00\rangle$ и $|11\rangle$.

Шаг процесса с номером i состоит в следующем. В момент времени τ_i мы имеем состояние системы "атомы + поле" ρ_i , при этом вероятность присутствия фотонов в полости исчезающе мала. Мы запускаем в резонатор один фотон, после чего включаем ячейку Поккельса, расположенную внутри резонатора и отражающую фотон в направлении детектора (см. рисунок 2.12) и фиксируем время срабатывания детектора. После этого шага делаем следующий точно так же, и т.д., набирая статистику времен срабатывания детектора.

Мы предполагаем, что время запуска фотона в полость мало по сравнению как с временем рабиевской осцилляции между состояниями $|1\rangle_{ph}|00\rangle_{at}$ и $|0\rangle_{ph}\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{at} + |10\rangle_{at})$, так и с ожидаемым временем вылет фотона из полости и им можно пренебречь, считая запуск практически мгновенным.

Пусть ρ'_i - априорное состояние системы в полости в момент i - го включения ячейки Поккельса. Поскольку фотон появляется в полости очень быстро, можно считать, что это состояние получается из ρ_i добавлением фотона в полость: $\rho'_i = a^+ \rho_i a$. После этого мы ждем время $d\tau_{click\ i}$, когда в детектор попадет фотон, вылетевший из полости.

Время срабатывания детектора $d\tau_{click\ i}$ на шаге i является случайной величиной,

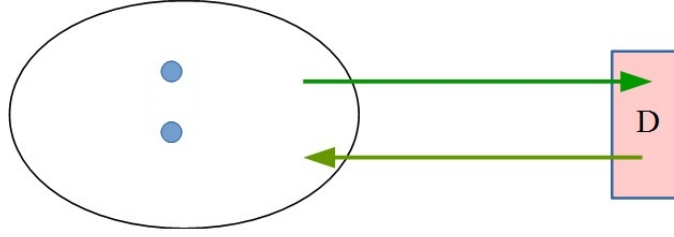


Рис. 2.12: Оптический отбор. Линдбладовский оператор $L_1 = a^\dagger a$ - улет фотона и возврат его обратно в полость после прохождения через детектор. Детектор щелкает всякий раз, когда в него попадает фотон.

зависящей также от шага i , так что решая основное уравнение, мы лишь найдем для нее верхнюю границу dt_i . Функция распределения $d\tau_{click\ i}$ меняется с каждым шагом, и является априорной функцией распределения, которую мы находим по уравнению (??), не прибегая ни к каким экспериментам. Это вычисление нужно лишь для того, чтобы найти верхнюю границу dt_i ожидания щелчка детектора на шаге i . Матрицу плотности ρ_{i+1} можно найти как решение задачи Коши для квантового основного уравнения (??), соответствующего вылету фотона из полости, для начального состояния $\rho'_i(0) = \rho'_i$, с тем условием, что для момента dt_i это решение $\rho'_i(dt_i)$ не содержит фотонов в полости с исчезающе малой вероятностью ошибки (ошибка может произойти только когда мы прекратили ждать срабатывания детектора, а фотон все-таки остался в полости или может быть испущен позже).

Итак, верхнюю границу dt_i для $d\tau_{click\ i}$ на шаге i мы ищем численно, решая квантовое основное уравнение. Мы полагаем $\rho_{i+1} = \rho'_i(dt_i)$. После вылета фотона из полости состояние атомов внутри полости не меняется, поэтому мы можем произвольно увеличить время ожидания полного вылета до значения, большего найденного dt_i для уменьшения вероятности ошибки.

Мы будем делать так определенные последовательные шаги, каждый раз фиксируя время срабатывания детектора на вылетающий из полости фотон. Если момент $\tau_i - \tau_{i-1}$ щелчка детектора на шаге i рассматривается как случайная величина, то функция распределения этой величины находится как $P(t) = \langle 0_{ph} 0_1 0_2 | \rho(t) | 0_{ph} 0_1 0_2 \rangle + \langle 0_{ph} s | \rho(t) | 0_{ph} s \rangle$, то есть как вероятность того, что фотон вылетел из полости за время t , считая нулевой отметкой начало шага i . Плотность распределения времени срабатывания детектора есть $dP(t)/dt$. После достаточно большого числа последовательных шагов мы считаем среднее время $d\tau$ по всем значениям $d\tau_{click\ i}$ срабатывания детектора в наших экспериментах. Далее мы установим факт достаточно быстрого подавления внедиагональных элементов матрицы плотности ρ_i с ростом i , так что распределение величины $d\tau_{click\ i}$ для разных i будет практически одинаковым для больших i , и сойдется к распределению, характерному либо для триплета $|00\rangle$, либо для синглета $|s\rangle$; таким образом, величины времен ожидания щелчка детектора dt_i , начиная с момента исчезновения недиагональных элементов, будут одинаковы, обозначим их через dT .

Если среднее время $d\tau$ вылета фотона меньше некоторого порога $d\tau_{cr}$, в полости находится темный синглет $|s\rangle$, в противном случае мы имеем триплет $|00\rangle$, состояние бракуется, и вся серия экспериментов начинается заново - с выбора случайного

начального состояния атомов.

Срабатывание детектора на шаге i , в который попадает фотон, отраженный ячейкой Поккельса, происходит с замедлением, которое меняется между нулем и $d\tau_{click\ i} = \tau_i - \tau_{i-1}$; оно складывается из двух факторов: а) время срабатывания самой ячейки (она может не перекрывать всю полость и потому даже если в полости есть фотон, он не отразится сразу при прохождении вдоль полости) и б) возможность поглощения фотона компонентой $|00\rangle$ атомного состояния полости.

Если первоначальное состояние атомов $\rho_0 = |s\rangle\langle s|$, то мы имеем синглет и среднее время вылета a_s фотона из полости будет коротким. Если же $\beta = 0$, то мы имеем триплет $\rho_0 = |00\rangle_{at}\langle_{at}00|$ и среднее время вылета фотона a_t будет длиннее, так как за время бездействия ячейки Поккельса фотон может с ненулевой вероятностью поглотиться ансамблем атомов. Таким образом, достаточно взять статистический барьер для принятия решения $d\tau_{cr} = (a_s + a_t)/2$.

Считая применимым RWA приближение, рассмотрим в качестве математической модели шага нашего процесса квантовое основное уравнение с оператором Линдблада $A_1 = a$ - удаление фотона из полости:

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho), \quad \mathcal{L}(\rho) = \gamma(a\rho a^+ - \frac{1}{2}(\{a^+a, \rho\})), \quad H = H_{ТС}. \quad (2.30)$$

Его решение $\rho(t)$ можно приближенно найти, представив в виде последовательности двух шагов, из которых на первом делается один шаг в решении унитарной части (2.30): $\tilde{\rho}(t + dt) = e^{-iHdt/\hbar}\rho(t)e^{iHdt/\hbar}$, а на втором - шаг в решении уравнения (2.30) с удаленным коммутатором:

$$\rho(t + dt) = \tilde{\rho}(t + dt) + \frac{\gamma}{\hbar}(a\tilde{\rho}a^+ - \frac{1}{2}(\{a^+a, \tilde{\rho}\}))dt.$$

Грубо оценить параметр γ можно так. Поскольку изменение матрицы плотности на втором шаге, отнесенное к времени dt , за которое свет преодолевает длину полости, составляет величину эффективности ячейки Поккельса e_p : $0 < e_p \leq 1$, мы имеем $\frac{\gamma dt}{\hbar} = e_p$, откуда $\gamma = e_p \hbar / dt$. Для атома Rb^{85} длина полости, равная половине длины волны фотона, составляет 0.7 см , мы имеем $\gamma \approx 10^{-17} e_p$ эрг.

Предположим, что мы имеем один из вариантов: а) $|\Phi_0\rangle_{at} = |00\rangle$ или б) $|\Phi_0\rangle_{at} = |s\rangle$. В первом случае время срабатывания детектора, усредненное по большому числу испытаний, будет в силу центральной предельной теоремы очень близко к t_s , во втором - к t_t . Поскольку $t_t - t_s$ достаточно большая величина, мы сможем статистически достоверно различить эти два случая. Варианты а) или б) имеют место, например, если начальное состояние пары атомов имеет вид $|01\rangle$, так как в этом случае щелчок детектора при приготовлении исходного состояния для первого шага уже означает, что мы имеем состояние $|00\rangle$, а отсутствие щелчка в течение достаточно длительного времени - что мы имеем синглет $|s\rangle$.

Теперь пусть оба числа α, β ненулевые. Тогда в матрице плотности состояния атомов в базисе $|00\rangle, |s\rangle$, получаемой в результате описанной последовательности шагов внедиагональные члены будут подавляться с числом шагов, так что в пределе матрица плотности полностью распадется на $|00\rangle\langle 00|$ - с вероятностью $|\alpha|^2$ и $|s\rangle\langle s|$ с вероятностью $|\beta|^2$, и мы придем к уже разобранному случаю двух несовместных альтернатив. Подавление внедиагональных элементов матрицы плотности установлено

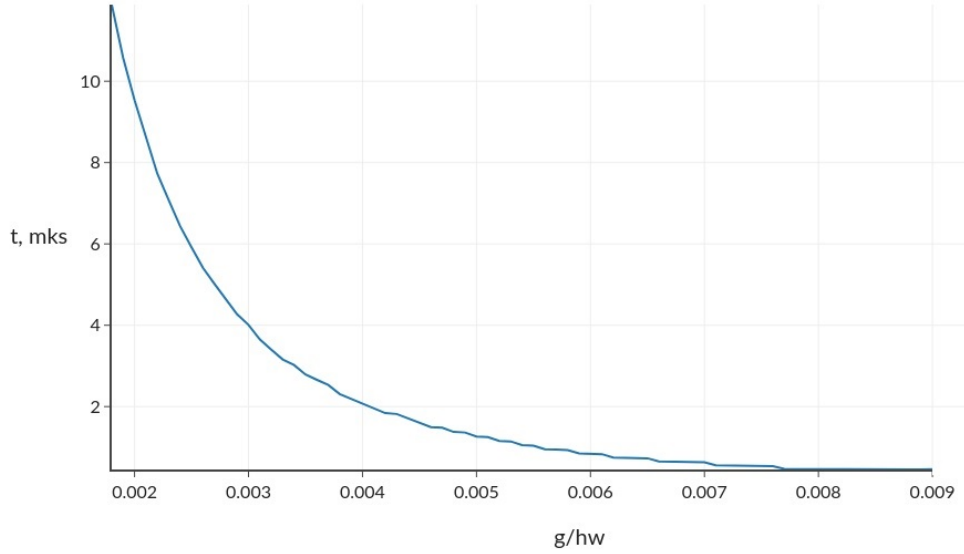


Рис. 2.13: Время $t = T_{non}$ полного затухания недиагональных элементов ($abs < 10^{-3}g/\hbar\omega$ в интервале $[0.01; 0.01]$ с шагом 0.01, интенсивность стока: $\gamma/\hbar\omega = 0.01$, шаг по времени: $dt = 0.001/\gamma$, пороговая населенность стока, при которой происходит запуск фотона: 0.95.

численным моделированием. Время полного подавления внедиагональных элементов матрицы плотности T_{non} получается суммированием всех временных отрезков ожидания полного вылета фотона из полости: $T_{non} = \sum_{i=0}^L dt_i$ где L - минимальное значение шага, на котором внедиагональные элементы матрицы ρ_L становятся пренебрежимо малыми. График времени полного подавления внедиагональных элементов матрицы плотности T_{non} в зависимости от энергии g взаимодействия атомов и поля приведен на рисунке 2.13.

На рисунке 2.14 изображены графики функций распределения времени вылета фотона из полости для разных значений γ ; соответственно, плотности распределения будут производными от этих функций: для $\gamma = g$ график плотности показан на рисунке 2.15.

Моменты щелчков детектора $d\tau_1, d\tau_2, \dots, d\tau_{L_s, t}$ в последовательных экспериментах соответствуют независимой выборке из значения данных величин; значения L_s, L_t для двух конкурирующих гипотез будут различаться ненамного. По центральной предельной теореме среднее арифметическое $\xi = \sum_{i=1}^L d\tau_i/L$ будет иметь при больших L нормальное распределение с центрами a_s и a_t соответственно, которые представляют собой средние времена вылета фотона для двух альтернативных гипотез: $a_s < a_t$.

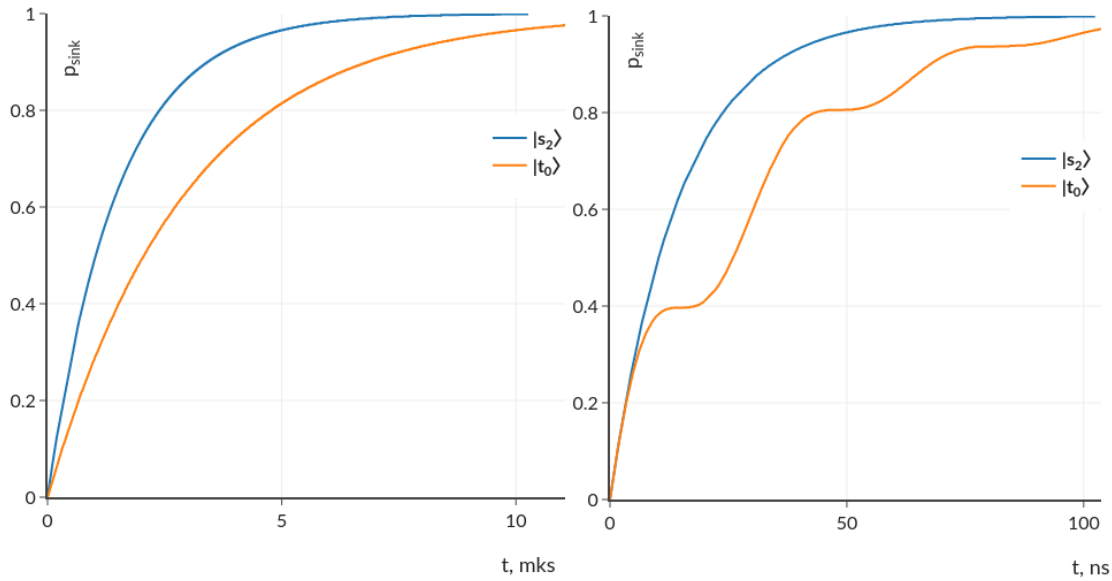


Рис. 2.14: Наполнение стока при одном испытании: слева при $\gamma = 0.01g$, справа при $\gamma = g$.

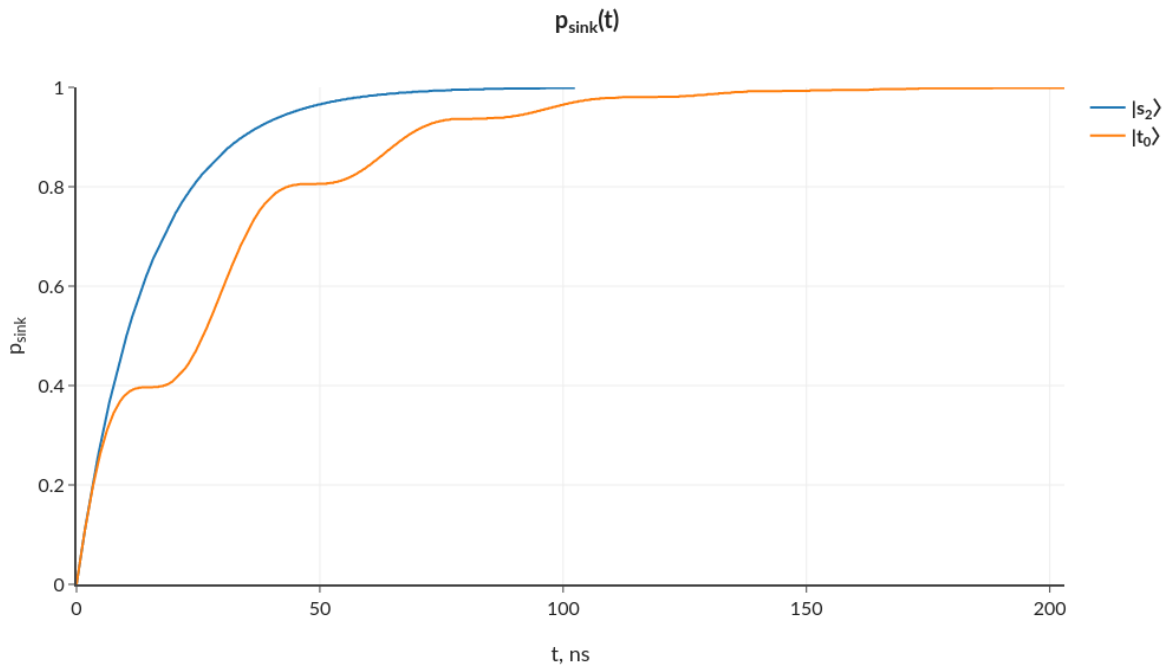


Рис. 2.15: Плотность вероятности вылета фотона при $\gamma = g$

Мы провели прямое моделирование оптического отбора с помощью датчика случайных чисел, последовательностью испытаний. В каждом испытании с интервалом dt_{click} моделируется измерение стока, то есть статистическое испытание факта вылета фотона из полости, исходя из рассчитанной по уравнению (2.30) вероятности. При этом уравнение (2.30) решается методом Эйлера с шагом по времени dt , причем временные интервалы в вычислительной модели выбирались так, чтобы для любого

шага по времени выполнялись бы неравенства $dt < dt_{\text{click}} \ll d\tau_{\text{click } i} \leq dT$. Если фотон вылетел, испытание считается завершенным, мы снова запускаем его в полость, изменяя начальное условие для (2.30), и переходим к следующему испытанию. Число всех испытаний обозначается через N , максимальное время одного испытания $dT = \max(dt_i)$. Ниже приведены результаты численного моделирования для следующих значений параметров:

Шаг по времени решения уравнения (2.30): $dt = 10$ ns, интенсивность вылета в сток: $\gamma = 0.01g$, период проверки срабатывания детектора $dt_{\text{click}} = 50$ ns, число испытаний (каждое испытание проводится до первого срабатывания детектора) $N = 1000$, $a_t = 1.551$ mks, $a_s = 1.125$ mks.

Практически можно взять $n_{\text{bor}} = 2T_{\text{gen}}/(a_s + a_t)$ как среднее число щелчков детектора за общее время T_{gen} наблюдения, $T_{\text{gen}} = NdT$ и применим наш статистический критерий так: при числе щелчков $n_{\text{click}} > n_{\text{bor}}$ мы имеем синглетное состояние $|s\rangle$, в противном случае - триплет $|00\rangle$.

Тогда ошибка первого и второго рода оценится сверху как квантиль $\int_{n_{\text{bor}}}^{\infty} N_{0,\sigma}(x) dx$ нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией $1/\min\{L_s, L_t\}$, и может быть сделана сколь угодно малой с увеличением T_{gen} .

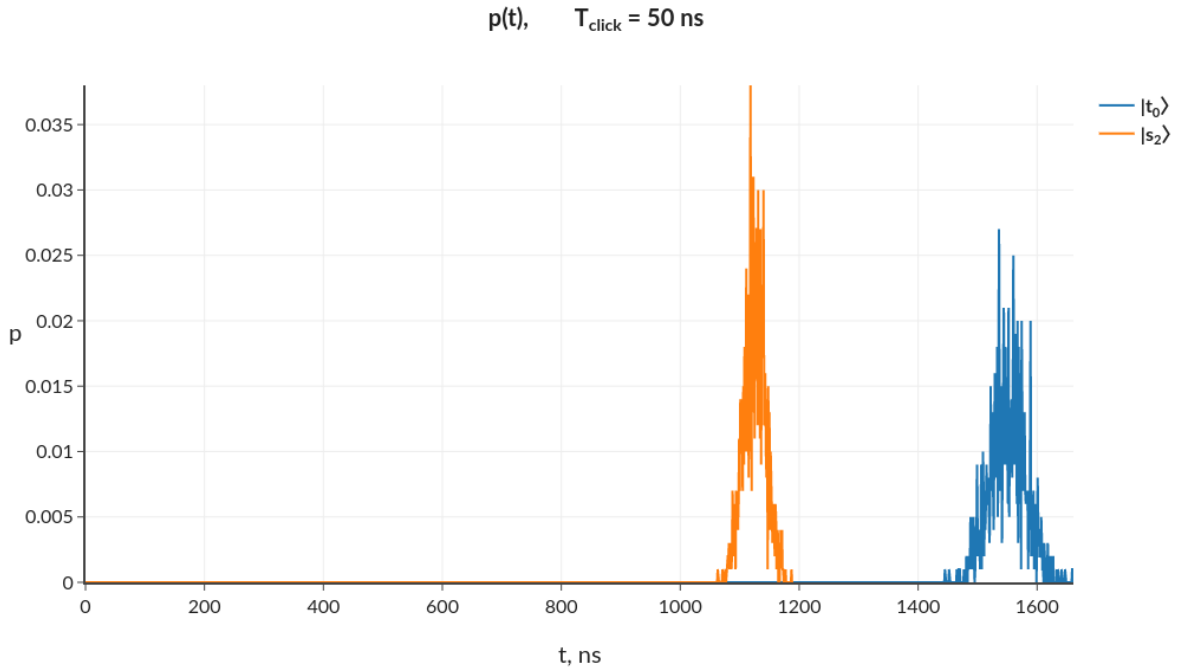


Рис. 2.16: Плотность распределения среднего времени вылета фотона за 1000 испытаний, точность моделирования $dt = 1$ ns

2.18 Многоуровневый случай

Описанный оптический отбор темных состояний применим и к ансамблям многоуровневых атомов. Здесь надо рассмотреть состояния многоуровневого синглета $|S_D\rangle$

вида (2.28) и дополнить его до ортонормированного базиса "светлыми" состояниями. При этом отбор должен производиться по всем модам, которых в случае d уровней будет не больше C_n^2 . Энергия перехода g_i между уровнями возбуждения, соответствующими моде i , зависит от симметрии волновой функции электронной оболочки. Пусть моде i отвечает переход вида

$$|\Psi_{in}\rangle \rightarrow |\Psi_{fin}\rangle$$

между состояниями электронной оболочки. Если эти состояния обладают разными типами симметрии (одно симметрично относительно пространственной координаты r , другое - антисимметрично), переход в дипольном приближении возможен, то есть $g_i > 0$, если же тип симметрии одинаков, в дипольном приближении мы имеем $g_i = 0$, что означает возможность перехода только в высших порядках приближения, то есть g_i очень мало. Здесь мы будем учитывать переходы всех порядков.

Для трех уровней мы обозначаем мультисинглет через $|D_3\rangle$. Другое темное состояние имеет вид $|0_3\rangle(|0_11_2\rangle - |1_10_2\rangle)$, эти состояния мы сравним с $|0_10_20_3\rangle$.

Мы рассмотрели данные примеры состояний для ансамблей трех трех-уровневых атомов, проведя численное моделирование для значений параметров: $dt = 1$ ns, $\gamma = g$, $dt_{\text{click}} = 100$ ns, $N = 1000$. Графики функции распределения времени срабатывания детектора даны на рисунке 2.17, плотность распределения среднего времени щелчка детектора для разных состояний даны на рисунке 2.18.

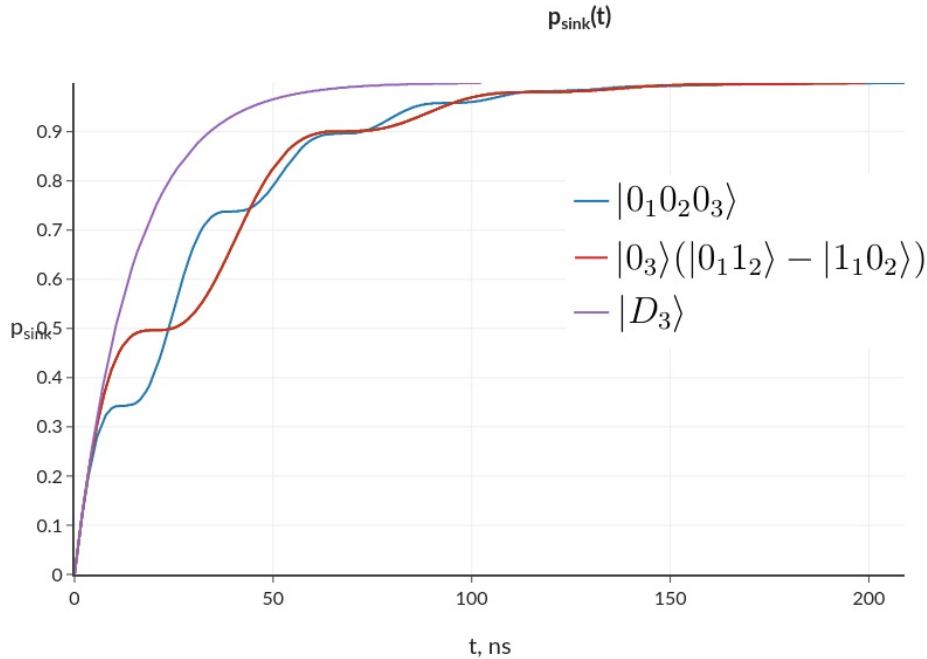


Рис. 2.17: Наполнение стока в зависимости от времени, $\gamma = g$.

Плотность распределения среднего значения времени детектирования фотонов считалась для значений $dt_{\text{click}} = 100$ ns, $a_{|10\rangle_{ph}|000\rangle_{at}} = 22.243$ mks, $a_{|10\rangle_{ph}|D_3\rangle} = 16.596$ mks, $a_{|10\rangle_{ph}|0\rangle(|01\rangle - |10\rangle)} = 22.423$ mks, $a_{|10\rangle_{ph}|0\rangle_2(|011_3\rangle - |110_3\rangle)} = 22.423$ mks, $a_{|10\rangle_{ph}|(01) - |10\rangle}|0\rangle = 22.423$ mks.

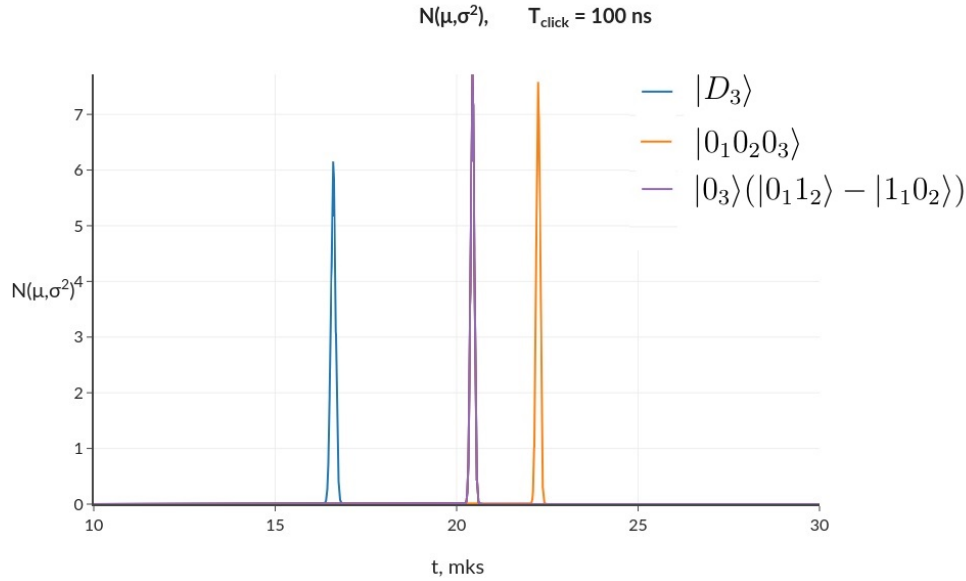


Рис. 2.18: Плотность распределения среднего времени вылета фотона за 1000 испытаний, $dt_{click} = 100 \text{ ns}$, $\gamma = g$.

Интересно здесь то, что когерентность возникает в результате измерений состояния: первоначально могло быть атомное состояние $|01\rangle$, а в результате оптического отбора у нас будет синглет $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$. Это противоречит интуиции: мы всегда считали, что измерение разрушает когерентность.

2.19 Химический квантовый компьютер

Химический квантовый компьютер должен моделировать химические реакции в режиме реального времени с целью управления такими реакциями. Он играет по отношению к реакциям ту же роль, что играет рентгеноструктурный анализ по отношению к стационарной структуре молекул, а именно: квантовый компьютер должен позволить видеть механизмы реакций с учетом поля, что будет означать полный контроль над химией. Эта задача в общем случае далека от решения, и компьютерного симулятора химии в настоящее время не существует. Ее решение представляется реальным только для сравнительно простых реакций, занимающих короткое время. Для сложной химии эту задачу можно реализовать только в контексте живого организма, где гигантская неопределенность начальных условий химии радикально жестко редуцируется структурой белков, то есть, в конечном счете, ДНК.

Покажем принципиальную возможность слежения за химической реакцией с помощью одного классического транзистора, входящего в современную микросхему. Число операций не превосходит числа n проходов света через транзистор: один транзистор в микросхеме имеет размеры не меньше $10 \text{ nm} \approx 10^{-6} \text{ см}$. С какой скоростью он может работать? Число операций не превосходит числа n проходов света, скорость которого $c \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$, через транзистор, то есть $n \approx 3 \cdot 10^{16}$. Для уверенного моделирования динамики нужен шаг по времени dt . Его величина находится из соотношения неопределенностей $dE \cdot dt = \hbar \approx 10^{-27} \text{ эрг сек}$. Для электродинамики

$dE \approx 10^{-17}$ эрг, $dt \approx 10^{-10}$ сек, и один транзистор по скорости работы справляется с моделированием эволюции одного заряда; даже если рассматривать переход электрона от атома к атому, время которого примерно 10^{-12} сек, один транзистор будет, в принципе, успевать воспроизводить состояние такого электрона.

Для ядерной физики $dE \approx 10^{-5}$ эрг, $dt \approx 10^{-22}$ сек, и один транзистор не может даже приблизиться к необходимой скорости работы для моделирования динамики одного ядра, даже при классическом представлении этой динамики. Кроме того: для предсказательного моделирования нужна квантовая механика, где для одного атома ^{235}U нужна память не меньше 2^{235} .

Таким образом, в рамках представлений копенгагенской квантовой теории, классический компьютер в принципе должен справиться с моделированием простой химии, по крайней мере, по тактовой частоте работы, но не с ядерными процессами на квантовом уровне. Ядерные превращения, при их современной трактовке, лежат вне сферы досягаемости вычислительной техники, основанной на электромагнетизме, далее мы придем к тому же выводу по-другому. Для создания настоящей теоретической базы ядерной физики нужно либо изобрести принципиально новые вычислительные машины, либо изменить саму трактовку этой, пока еще, в основном экспериментальной, дисциплины. Если первое вряд ли возможно, остается второе. Однако ядерная физика лежит пока вне сферы применимости наших моделей, и мы вернемся к электродинамике, а именно - к ее важнейшей сфере применения - химии.

Реализовать квантовый параллелизм в управлении динамикой химических реакций можно через квантовый компьютер на зарядовых состояниях электронов в твердотельных квантовых точках или в системе атомов, размещенных в оптических полостях. Один из вариантов этой схемы мы описали выше; другие примеры исследовались в ряде работ (см., например, [36]), здесь мы опишем кратко программные примитивы, необходимые для реализации этой схемы в виде внешнего вида квантовой операционной системы компьютера химического типа. Схема химического квантового компьютера, моделирующего переходы электронов, дана на рисунке 2.19.

Состояния реального набора атомов и электромагнитного поля представляется в этой схеме так: атомы представляются квантовыми точками - искусственными "атомами", связанными друг с другом оптоволоконном и проводниками зарядов. От точки к точке могут перемещаться как фотоны, так и электроны - по проводникам зарядов. Модифицировав эту схему, мы можем включить в нее и перемещение атомов. Такая система должна содержать следующие программные примитивы, соответствующие элементарным сценариям: переход электрона с уровня на уровень в данной точке с одновременным поглощением или испусканием фотона, переход фотона от одной точки к другой по оптоволокну, переход электрона от одной точки к другой по проводнику зарядов. Таким сценариям соответствуют некоторые массивы стандартных квантовых гейтов, например, перемещению фотона из точки в точку соответствует оператор $a_i^+ a_j + a_i a_j^+$.

Гамильтониан, управляющий динамикой состояния атомов и поля в таком компьютере, выписывается так же, как и для конечномерной модели КЭД Тависа-Каммингса (см. [22],[23]). Эта модель может быть использована для представления реакций ассоциации - диссоциации атомов, поскольку здесь есть спиновая динамика, и перемещение электронов от атома к другому атому зависит от спинового состояния имеющихся

Конечномерная химия

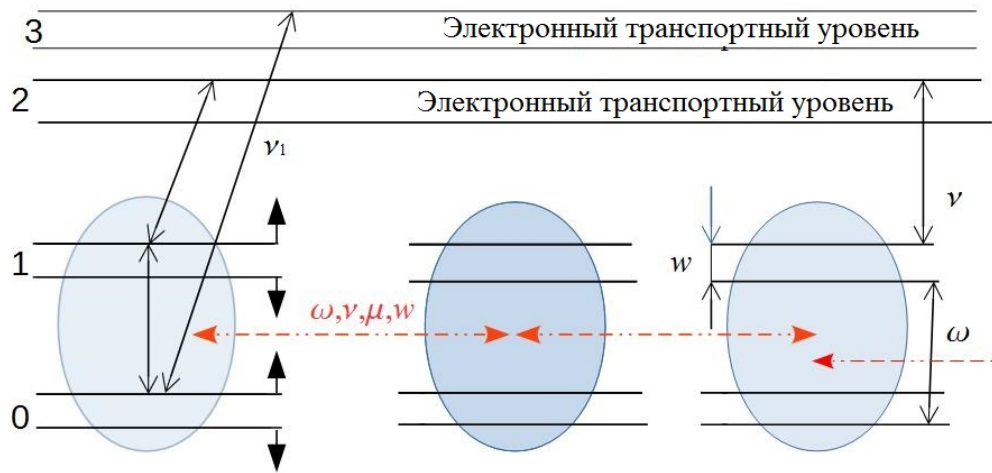


Рис. 2.19: Химический квантовый компьютер

в данных точках электронов - согласно принципу запрета Паули. В такой модели отражается специфика квантовой динамики зарядов и поля, что невозможно сделать на классическом суперкомпьютере: запутанность и нелокальность.

Hardware для такой модели может быть сделана уже в ближайшее время на твердотельных квантовых точках. Более точный вариант квантового компьютера можно получить, используя оптические резонаторы с помещенными внутрь многоуровневыми атомами - это многоуровневая модификация модели Тависа-Каммингса-Хаббарда. Вариант с оптическими полостями, где атомы находятся в вакууме и не подвержены тепловому воздействию фактически описывается первыми принципами квантовой теории, тогда как твердотельная модель требует приближенных методов: здесь квантовые точки окружены огромным числом посторонних атомов. Поэтому для точного отображения всех факторов декогерентности полости предпочтительнее. Фактически, имитация реальной системы атомов и поля будет происходить на модели искусственных атомов - квантовых точек и поля, моды которого жестко ограничены отобранными в резонаторах частотами.

В описанной химической модели квантового компьютера можно приближенно производить и операции, соответствующие стандартным гейтам фейнмановского интерфейса, так CNOT или CSign, Toffoli и однокубитные. Однако такая возможность носит характер демонстраций, тогда как химические примитивы - рабочий аппарат, нужный для имитации реальных сложных химических реакций.

2.20 Модификация с движением атомов. Черные состояния

Модификации модели Тависа-Каммингса-Хаббарда имеют целью приблизить ее к распространенным сложным системам, функционирующим без сложных и дорогостоящих в обслуживании оптических полостей. Например, вылет фотона из полости в сток, представляемая с помощью оператора Линдблада a_N , можно заменить распространением этого фотона вдоль дополнительной оптической сети полостей, не содержащих фотоны, которая ветвится, уходя все дальше от рассматриваемой системы полостей. Выше мы ввели специальные операторы Линдблада для отображения термической дефазировки.

Рассмотрим такую модификацию, где не только фотоны, но и сами атомы могут перемещаться из одной полости в другую. Эта возможность позволит охватить те виды динамики, при которых фотоны, испускаемые атомами, становятся различимыми в результате движения самих атомов.

Мы будем предполагать все атомы различимыми, поэтому записывать базисные состояния можно, исходя из "координат" атомов в пространстве, причем эти "координаты" будут просто номером полости, в который данный атом находится. Таким образом, базисное состояние будет иметь вид

$$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle_{ph} |at_1state, at_1position\rangle |at_2state, at_2position\rangle \dots |at_nstate, at_nposition\rangle, \quad (2.31)$$

где $|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle_{ph}$ - как обычно, числа фотонов в полостях $1, 2, \dots, k$, $|at_istate, at_iposition\rangle$ характеризует атом i : $at_istate \in \{0, 1\}$ - состояние его возбуждения, $at_iposition \in \{1, 2, \dots, k\}$ - полость, в которой он находится. Мы приводим здесь и далее обозначения для двухуровневых атомов; для многоуровневых будем иметь $at_istate \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Гамильтониан данной модификации получается из гамильтониана Тависа-Каммингса-Хаббарда добавлением дополнительных слагаемых, описывающих туннелирование атомов из полости в полость:

$$\sum_{i, 1 \leq j < q \leq k} r_{jq}^i (S(i)_j^+ S(i)_q + S(i)_q^+ S(i)_j), \quad (2.32)$$

где S_j, S_j^+ - операторы уничтожения и рождения атома i в полости j , которые действуют так же, как и операторы уничтожения и рождения атомного возбуждения σ, σ^+ , r_{jq}^i - неотрицательные интенсивности туннелирования атома i из полости j в полость q и наоборот.

Рассмотрим систему из двух полостей, соединенных оптоволоконном и с возможностью туннелирования атомов из одной полости в другую; интенсивности туннелирования пусть для атомов будут одинаковыми, равно как и силы взаимодействия с полем в обеих полостях. Для системы двух двухуровневых атомов рассмотрим их состояние

$$|C_2\rangle = |s_1\rangle - |s_2\rangle, \quad (2.33)$$

где $|s_1\rangle = |01\rangle|11\rangle - |11\rangle|01\rangle$ - двухатомный синглет в первой полости, $|s_2\rangle = |02\rangle|12\rangle - |12\rangle|02\rangle$ - такой же синглет во второй полости (обозначения приведены согласно

(2.31)). Такое состояние $|C_2\rangle$ в нашей системе не сможет испустить фотон несмотря на то, что атомы имеют возможность перемещаться из полости в полость, а в разных полостях фотоны разные, и потому, например, просто состояние $|s_1\rangle$ темным не будет.

Состояния типа $|C_2\rangle$ мы назовем черными. В черном состоянии пара атомов не только не может испустить фотон, но атомы не могут и туннелировать из полости в полость по той же причине: из-за интерференционного эффекта. Объединим полости "мостами туннелирования атомов", и обозначим полученный граф через G . Назовем граф G четным, если любой цикл в нем содержит четное число ребер. Тогда независимо от оптоволокна для перемещения фотонов, для двухатомного ансамбля в четном графе будут существовать черные состояния, а для нечетного - нет. Действительно, в четном графе мы всегда сможем расставить знаки для синглетных состояний двух-атомной системы $|s_j\rangle$ в полостях j таким образом, чтобы для двух смежных полостей знаки были разными, что и обеспечит наличие черного состояния двух-атомной системы. Такую расстановку знаков назовем правильной. Для нечетного графа правильную расстановку знаков выбрать нельзя.

Пусть σ_i - знак, выбранный для полости i при некоторой правильной расстановке знаков. Тогда состояние $|C_2\rangle = \sum_i \sigma_i |s_i\rangle$ будет черным.

Пусть \mathcal{K} - некоторое разбиение четного числа $2k$ атомов на пары, G - четный граф. Тогда состояние $2k$ атомной системы в данном графе вида

$$|C(\mathcal{K})\rangle = |C_2^1\rangle \otimes |C_2^2\rangle \otimes \dots \otimes |C_2^k\rangle, \quad (2.34)$$

где верхние индексы соответствуют парам из разбиения \mathcal{K} , будет черным.

В состоянии $|C(k)\rangle$ любая динамика (движение из полости в полость или испускание фотона) блокируется аналогичной динамикой спаренного с ним партнера. Таким образом, в таком состоянии атомы не могут ни испускать света, ни перемещаться между полостями.

Любая линейная комбинация состояний вида (2.34) по разным разбиениям на пары \mathcal{K} также будет черным, и атомы, находящиеся в ней, не смогут испустить фотон. Открытым остается вопрос о том, есть ли черные состояния иного типа.

Можно определить понятие черного состояния и для ансамблей из d уровней атомов, и сформулировать гипотезу о структуре таких состояний, подобную приведенной в параграфе 2.16, которая также будет открытым вопросом.

2.21 Относительная индивидуальность электронов

Следующей модификацией модели Тависа-Каммингса-Хаббарда будет введение понятия электрона. До сих пор мы говорили об атомах и о их возбуждениях, но эти возбуждения связаны с электронами, находящимися в атомах. Если имеется жесткая связь электронов с атомами, нет смысла вводить электроны как отдельные объекты, так как их состояния будут просто состояниями атомов. Но если мы хотим сделать нашу модель более реалистичной, мы должны допустить переходы электронов от

атома к атому, что требует введения электронов в явной форме. При этом каждый электрон будет иметь свой идентификационный номер, то есть мы будем различать электроны точно так же, как они различаются в стандартном формализме фоковских состояний, где их волновая функция антисимметризуется.

В самом простом случае у электрона в атоме есть один из двух возможных уровней орбитального возбуждения: $|0\rangle$ - основной и $|1\rangle$ - возбужденный, и один из двух возможных ориентаций спина: $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$. Электрон, находящийся на основном уровне $|0\rangle$, может поглотить фотон частоты ω , и подняться на уровень $|1\rangle$ - это и есть атомное возбуждение, а также может спуститься обратно, испустив фотон; оба перехода идут с сохранением спина. Электрон, находящийся на возбужденном уровне $|1\rangle$, может переходить на другой атом - на тот же уровень возбуждения, но в новом атоме, с сохранением спина. При этом всегда должен соблюдаться принцип запрета Паули: в одном состоянии пары "орбита+спин" может находиться не более одного электрона. Таким образом, любой переход в данное состояние, уже занятое каким-то электроном, становится для другого электрона невозможным.

Таким образом, базисное состояние атома будет теперь иметь вид

$$|atom\rangle = |level_1, level_2\rangle \quad (2.35)$$

где $|level_{1(2)}\rangle$ есть список $|e_1\dots e_k\rangle$, состоящий из одного или двух членов ($k = 1, 2$), и каждый его член имеет вид $|e_i\rangle = |id_i, spin_i\rangle$, где id_i - идентификатор электрона, идущего i -м по списку, $spin_i$ - направление его спина. Мы договоримся упорядочивать список e_1, \dots, e_k по порядковому номеру идентификаторов входящих в него электронов, тогда запись базисного состояния будет определена однозначно.

В таком формализме, где индивидуальность электронов учитывается так же, как и для атомов, состояние электронов должно быть антисимметризовано для всех электронов, находящихся на одном уровне у одного атома.

Возможен и другой подход, когда индивидуальность электронов относительна. Тогда учитывается не траектория отдельного электрона, а заполненность электронных оболочек отдельных атомов. Тогда базисное состояние атома будет иметь тот же вид (2.35), однако отдельный уровень будет иметь уже иной вид, например, $|level_1\rangle$ будет упорядоченной парой битов вида a, b , где $a = 0$ означает отсутствие на данном уровне электрона со спином \uparrow , а $a = 1$ - его присутствие, и аналогично с b , которое индексирует наличие электрона со спином вниз на данном уровне.

Относительная индивидуальность электронов является хорошим вычислительным приемом при моделировании процессов, в которых электроны только переходят между фиксированными атомами, или находятся на определенных транспортных уровнях между атомами, но не движутся изолированно от атомов в пустом пространстве; в последнем случае следует применять общий подход, предполагающий антисимметризацию их состояний.

Общий подход может представлять некоторую проблему. Если у нас просто имеется ансамбль электронов, мы можем с самого начала антисимметризовать их общее состояние по обобщенной координате: "пространственное положение + спин", записывая это состояние в виде определителя матрицы $|\Psi\rangle_{\mathcal{E}} = (\langle\psi_i|j\rangle)$, где $|\psi_i\rangle \in \mathcal{E}$, $i = 1, 2, \dots, N$ - всевозможные состояния отдельного электрона из некоторого, заранее выбранного, множества \mathcal{E} , $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, а общее состояние такого ансамбля задать

в виде линейной комбинации состояний вида $|\Psi\rangle_{\mathcal{E}}$ по разным \mathcal{E} . Однако, если электроны с атомами находятся в запутанном состоянии, этот метод антисимметризации встретится с трудностями.

Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2012. — 224 с. — 500 экз. — ISBN 978-5-9221-0819-5.
- [2] R.Feynman, QED: The strange theory of light and matter, Princeton University Press, 1985.
- [3] R.Feynman, D.Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, 1984, Р.Фейнман, Д.Хиббс, Квантовая механика в интегралах по траекториям, Москва, Наука, Физ.-мат. лит.
- [4] Ю. И. Богданова, Д. В. Фастовецас, Б. И. Бантыш, А. Ю. Чернявский, И. А. Семенихин, Н. А. Богданова, К. Г. Катамадзе, Ю. А. Кузнецов, А. А. Кокин, В. Ф. Лукичев, Методы анализа качества элементной базы квантовых информационных технологий, Квантовая электроника, 2018, том 48, N 11, страницы 1016–1022.
- [5] Shor P. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring // Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on — IEEE, 1994. — P. 124–134. — ISBN 0-8186-6580-7 — doi:10.1109/SFCS.1994.365700
- [6] P.Benioff, Quantum Mechanical Models of Turing Machines That Dissipate No Energy Phys. Rev. Lett., Vol. 48, 1982, pp. 1581–1585.
- [7] Richard P. Feynman, Simulating Physics with Computers, International Journal of Theoretical Physics, VoL 21, Nos. 6/7, 1982, pp. 467-488.
- [8] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. Smolin, H. Weinfurter, Elementary gates for quantum computation Phys.Rev. A52 (1995) 3457.
- [9] А. Китаев, А. Шень, М. Вялый, Классические и квантовые вычисления, 1999. 192 с. ISBN 5-900916-35-9.
- [10] L. Fedichkin, M. Yanchenko, K. A. Valiev, Novel coherent quantum bit using spatial quantization levels in semiconductor quantum dot, Quantum Computers and Computing 1, 58 (2000).
- [11] L.Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), May 1996, pages 212-219. Proceedings, Melville, NY, 2006, vol. 810, electronic version: xxx.lanl.gov, quant-ph/0610052.

- [12] Y.Ozhigov, Lower bounds of a quantum search for an extreme point, Proc.Roy.Soc.Lond. A455 (1999) 2165-2172.
- [13] C.H. Bennett, E. Bernstein, G. Brassard and U.V. Vazirani, "Strengths and weaknesses of quantum computing" SIAM J. on Computing, Vol. 26, No. 5, pp. 1510-1523, 1997.
- [14] C. Zalka: Grover's quantum searching algorithm is optimal. Phys. Rev. A 60 (1999) 2746-2751.
- [15] Ozhigov Y.I. Quantum computers speed up classical with probability zero, Chaos, Solitons and Fractals, 1999, 10, 1147-1163.
- [16] C.Zalka, Simulating quantum systems on a quantum computer, Proceedings of The Royal Society A 454(1969):313-322, January 1998.
- [17] S.Wiesner, Simulations of Many-Body Quantum Systems by a Quantum Computer, arXiv:quant-ph/9603028.
- [18] P.W.Shor, Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory, Phys. Rev. A 52, R2493(R), 1995.
- [19] H. Breuer and F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems, Oxford (2002).
- [20] A. V. Kulagin, V. Y. Ladunov, Y. I. Ozhigov, N. A. Skovoroda, and N. B. Victorova "Homogeneous atomic ensembles and single-mode field: review of simulation results Proc. SPIE 11022, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2018, 110222C (15 March 2019); <https://doi.org/10.1117/12.2521763>.
- [21] R. Dicke, Phys. Rev. . 93, 99 (1954).
- [22] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE 51 (1): 89-109, (1963). doi:10.1109/PROC.1963.1664
- [23] Michael Thomas Tavis, A Study of an N Molecule Quantized-Radiation-Field Hamiltonian, Dissertation, <https://arxiv.org/abs/1206.0078>.
- [24] P. Kok, K. Nemoto, and W. J. Munro, Properties of multi-partite dark states, e-print 2002 <http://lanl.arxiv.org/abs/quant-ph/0201138>.
- [25] Knill, E., Laflamme, R., Milburn, G. J. (2001). "A scheme for efficient quantum computation with linear optics". Nature. Nature Publishing Group. 409 (6816): 46-52
- [26] Gottesman, D., Chuang, I. L. (1999-11-25). "Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations". Nature. 402 (6760): 390-393
- [27] Bennett, Charles H.; Brassard, Gilles; Crépeau, Claude; Jozsa, Richard; Peres, Asher; Wootters, William K. (1993-03-29). "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels". Physical Review Letters. 70 (13): 1895-1899.

- [28] Popescu, S., Knill-Laflamme-Milburn Quantum Computation with Bosonic Atoms, PRL 99, 130503 (2007).
- [29] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser, Phys. Rev. Lett., 1987, Vol. 58, no. 4, p. 353.
- [30] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate, Phys. Rev. Lett. 75, 4714 (1995).
- [31] Azuma H., Quantum computation with the Jaynes-Cummings model, Prog. Theor. Phys. 126, 369-385 (2011).
- [32] V. Ladunov, Y. Ozhigov, N. Skovoroda , Computer simulation of quantum effects in Tavis-Cummings model and its applications, SPIE Proceedings, vol. 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016; 102242X (2017) <https://doi.org/10.1117/12.2267190>
- [33] Plenio, M., et al., "Dephasing assisted transport: Quantum networks and biomolecules New J. Phys. 10, 113019 (2008).
- [34] Fenna, R. E.; Matthews, B. W. (1975). "Chlorophyll arrangement in a bacteriochlorophyll protein from *Chlorobium limicola*". Nature 258 (5536): 573–7. Bibcode:1975Natur.258..573F. doi:10.1038/258573a0
- [35] Y.Ozhigov, Dark states of atomic ensembles: properties and preparation, Proc. SPIE 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016, 102242Y (December 30, 2016); doi:10.1117/12.2264516.
- [36] A.V.Tsukanov, Optomechanical systems and quantum computing, Russian Microelectronics, September 2011, 40:333.
- [37] Бор Н., Дискуссии с Эйнштейном о проблемах теории познания в атомной физике // Атомная физика и человеческое познание — М.: ИЛ, 1961. — стр. 60.
- [38] Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. — М.: Наука, 1989. — 400 с. — ISBN 5-02-012452-9.
- [39] V.M.Akulin, Dynamics of Complex Quantum Systems, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, 2006.
- [40] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables" I". Physical Review. 1952, 85: 166–179.
- [41] A.Khrennikov, Vaxjo Interpretation of Wave Function: 2012, Reconsideration of Foundations-6, AIP, 1508, 244-252 (2012), DOI: 10.1063/1.4773136.
- [42] Aspect, Alain; Dalibard, Jean; Roger, Gérard (December 1982). "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers". Physical Review Letters. 49 (25): 1804–1807.
- [43] Jian-Wei Pan; D. Bouwmeester; M. Daniell; H. Weinfurter; A. Zeilinger (2000). "Experimental test of quantum nonlocality in three-photon GHZ entanglement". Nature. 403 (6769): 515–519.

- [44] J. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox"; *Physics*, (1964), 1 (3): 195–200.
- [45] J. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics"; *Reeview of Modern Physics*, (1966), 38, N3, стр. 447-452.
- [46] Aspect, Alain; Dalibard, Jean; Roger, Gérard, (1982), Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time- Varying Analyzers. *Physical Review Letters*. 49 (25): 1804–1807. Bibcode:1982PhRvL..49.1804A. doi:10.1103/PhysRevLett.49.1804.
- [47] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Anton Zeilinger, Going Beyond Bell's Theorem, in: 'Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe', M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht, 69-72 (1989).
- [48] AIP Conference Proceedings, vol. 962, Quantum Theory: Reconsideration of foundations -4, ed. Guillaume Adenier, Andrei Yu. Khrennikov, Pekka Lahti, Vladimir I. Man'ko and Theo M. Nieuwenhuizen, (2007), ISBN: 978-0-7354-0479-3.
- [49] F.Ablayev, C.Moore, C.Pollett, Quantum and Stochastic Branching Programs of Bounded Width, International Colloquium on Automata, Languages, and Programming , ICALP 2002: Automata, Languages and Programming pp 343-354.
- [50] Dovesi, R., Civalleri, B., Roetti, C., Saunders, V. R. and Orlando, R. (2005) Ab Initio Quantum Simulation in Solid State Chemistry, in *Reviews in Computational Chemistry*, Volume 21 (eds K. B. Lipkowitz, R. Larter and T. R. Cundari), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA. doi: 10.1002/0471720895.ch1
- [51] Y.I.Ozhigov, Distributed synthesis of chains with one-way biphotonic control, *Quantum Information and Computation*, vol. 18, 7-8, pp. 0592-0598.
- [52] Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк (1955). «К теории умножения причинных сингулярных функций». *ДАН СССР* 100: 25.
- [53] S. Hameroff; R. Penrose, "Consciousness in the universe: A review of the 'Orch OR' theory". *Physics of Life Reviews*, 2014, 11 (1): 51–53.
- [54] Ф.Маттук, Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел, М., Мир, 1974.
- [55] V. P. Maslov, "Rotation of a Neutron in the Coat of Helium-5 as a Classical Particle for a Relatively Large Value of the Hidden Parameter t_{meas} ", *Math. Notes*, 103:1 (2018), 67–74.
- [56] В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин, Параллельные вычисления, БХВ-Петербург, 2002. — 608 с. ISBN 5-94157-160-7.
- [57] Limits to Parallel Computation: P-Completeness Theory, R. Greenlaw, H. J. Hoover, W. L. Ruzzo, Oxford University Press, 1995, pp. 336.
- [58] А.С.Холево, Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи, *Пробл. передачи информ.*, 1973, том 9, выпуск 3, страницы 3–11.
- [59] А.А.Марков младший, О непрерывности конструктивных функций, *Успехи мат. наук*, 1954, 9, N 3 (61), стр. 226-229.

- [60] G.S.Tseitin, Algorithmic operators in the constructive metric spaces, Doklady Akademii Nauk USSR (rus), 1959, 128, N 1, pp.49-52.