

Квантовый компьютер

Ю.И.Ожигов¹

¹Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Физико-технологический институт РАН им. К.А.Валиева, e-mail: ozhigov@cs.msu.su

Глава 1

Введение в квантовую механику

Глава 2

Конечномерные модели КЭД

Глава 3

Квантовый детерминизм

”Бог не играет в кости” - эта фраза Эйнштейна выражает веру в разумность, то есть детерминированность мира. Принято считать, что квантовая теория опровергает эту разумность, и мы обречены видеть мир только сквозь призму стохастических процессов, не имеющих причины и происходящих чисто случайным образом ([37], [38]). И это - действительно так, но лишь для ”простых” процессов, описание которых не требует привлечения понятия запутанности и поэтому может быть дано - приближенно - в рамках классической механики: именно с такими процессами и связаны успехи квантовой теории в 20 веке. Особенностью таких процессов является возможность рассматривать окружение как марковское, то есть не имеющее долговременной памяти в рамках открытой квантовой системы ([19]) - концепции, очень хорошо работающей для всех систем, за исключением живых существ, к которым она не применима в принципе.

Распространение квантовой теории на сложные много-частичные процессы, уже не имеющие квазиклассического описания, требует привлечения формализма гильбертовых пространств с самого начала, и потому для таких процессов универсальной моделью является фейнмановский квантовый компьютер ([7]). Понимание работы этого, пока гипотетического, устройства, на первый взгляд, радикально расходится с интуитивным восприятием принципа причинности, то есть детерминированностью.

Но это противоречие - кажущееся. В конечном счете мы должны прийти именно к детерминистическому описанию сложных процессов, потому что ”Бог не играет в кости”. Но это описание ни в коем случае не будет механистическим; оно должно вытекать из квантовой механики. Это описание и будет конечной целью квантового компьютеринга. Переход от одного классического состояния к другому через короткий этап квантовой суперпозиции - вот что должен, в конечном счете, делать квантовый компьютер.

Моделировать работу квантового компьютера в режиме реального времени, исходя только из алгебраического формализма, как это делается для модельных задач квантовой физики (см., например, [39]) невозможно, так как это противоречит существованию быстрых квантовых алгоритмов (см., например, [11]). Результат работы такого алгоритма принципиально невозможно предсказать быстрее, чем он возникнет в реальности; именно это обстоятельство делает квантовый компьютер совершенно особым прибором. Для моделирования его работы, скажем, для отладки гейтов, необ-

ходимы существующие компьютеры, работающие как детерминированные машины.

Этот детерминизм проявляется в том, что в практических численных расчетах амплитуда квантовых состояний никогда не бывает бесконечно малой: в машинных расчетах всегда присутствует некий воображаемый "квант амплитуды" ϵ , такой что если абсолютная величина какой-то амплитуды становится меньше ϵ , она считается равной нулю. Это, естественно, делает практически невозможным моделирование масштабируемого квантового компьютера. Для его работы требуется получать состояния $|\Psi\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j |j\rangle$ с ненулевыми λ_j , такие что мощность $|J|$ множества J растет экспоненциально и хранение в памяти компьютера всех его элементов делается абсолютно не возможным. Наличие "кванта амплитуды" - есть эквивалентная форма такого запрета, поскольку в разложении $|\Psi\rangle$ должны присутствовать коэффициенты λ_j , такие что $|\lambda_j| \leq |J|^{-1/2}$.

Так как машинному расчету конструкций квантового компьютера нет альтернативы, мы обязаны рассмотреть возможность того, что "квант амплитуды" имеет физический смысл. А именно, в ансамблях из n частиц, для которых $|J| = \exp(n)$, происходит естественная декогерентность, связанная с исчезновением компонент состояний $|j\rangle$ со слишком малой амплитудой λ_j . Этот источник потерь когерентности, в случае примерного равенства абсолютных величин всех $|\lambda_j|$, вел бы к ликвидации когерентности как таковой, и, следовательно, к реальному детерминизму.

Нахождение путей к подобному детерминистическому описанию сложных систем мы рассматриваем как глубинную задачу теории квантового компьютера.

Детерминизм сложных систем должен как-то проявляться и в стандартной квантовой теории, где ϵ можно устремлять к нулю, то есть квант амплитуды должен непротиворечиво вписываться в аналитическую технику, применимую к экспериментам. Оказывается, квантовая теория допускает парадоксальный способ введения причинности - в виде квантования амплитуд элементарных событий, таким образом, что каждая отдельная порция амплитуды при некоторых условиях, будет обладать причинностью.

Такую причинность легче всего понять на примере особых состояний ансамбля атомов и поля, в котором разные компоненты суперпозиции отличаются друг от друга лишь переобозначением отдельных атомов, поведение которых в рамках данного гамильтониана одинаково. Эти состояния мы называем *связанными*. Например, два атома в оптической полости, обладающие одинаковой интенсивностью взаимодействия с полем, обладают одинаковым поведением в рамках гамильтониана Тависа-Каммингса, хотя они различимы пространственно; связанным будет состояние двух таких атомов, компоненты которого различаются только их перестановкой. Еще более простым примером связанного состояния является базисное. При этом, естественно, возникает вопрос о том, в каком базисе мы рассматриваем нашу систему.

Стандартная, копенгагенская квантовая теория считает все базисы равноправными и переход от одного к другому задается унитарным оператором перехода. В сложных системах этого быть не может - там есть один выделенный базис, в котором и формулируется условие связности. Здесь действует "соотношение неопределенностей", подобное тому, что сформулировано Бором и Гейзенбергом для измерений квантового состояния в разных базисах. Только теперь речь идет об описаниях

простых и сложных систем. Можно хорошо описывать простые системы, например, атомы водорода. Это описание - статистическое, оно опирается на гигантское число потенциальных объектов - атомов водорода. Можно научиться (мы пока практически не умеем) описывать сложные системы; там будет выделенный базис, и, детерминизм, правда не в смысле предсказания исходов квантовых измерений, а как возможность предсказания траектории сложной системы с приемлемой для нее точностью.

Но невозможно одновременно хорошо описывать все атомы, входящие в бактерию, и саму эту бактерию - это исключено! Знаменитый эксперимент, когда от измерения одного фотона зависит жизнь шредингеровского кота доставляет отличный пример. Если от измерения одной элементарной частицы зависит траектория сложнейшей "системы" - живого кота, это измерение выходит за рамки копенгагенской формулировки и не подлежит стандартному статистическому анализу. Это уже не отдельная элементарная частица, а малая сторона огромной системы частиц, так что жизнь и смерть шредингеровского кота определяется далеко не столько фотоном, а всей системой, приводящей в действие механизм его убийства. На практике, если конкретизировать эксперимент, вполне вероятно, что фотон вообще окажется здесь не причем.

Мы должны считать, что сложные системы описываются детерминистически, потому что есть такая вещь, как молекула ДНК. Этот удивительный объект настолько точно определяет траекторию живого существа, что служит образцом детерминизма для сложных систем. Надо понять, как этот сложный классический детерминизм вытекает из квантового принципиального плюрализма.

В стандартном матричном квантовом формализме заложена исходная множественность - плюрализм, заключающийся в размножении каждой порции амплитуды, при котором ее воображаемая "траектория" становится ветвящейся - в этом суть матричного умножения, служащего формальным представлением эволюции квантового состояния во времени¹. Формально можно сопоставить каждой малой порции амплитуды в любом начальном состоянии совершенно определенную такую же малую порцию амплитуды в конечном состоянии, избежав ветвлений - это очень просто. Но такое формальное назначение детерминизма ничего не дает полезного, так как здесь мы снова рабски следуем формализму копенгагенской теории и не получаем путь перехода от квантовой теории простых объектов к детерминистическому описанию сложных.

Польза будет, если детерминизм будет согласован с квантовой динамикой, определяемой гамильтонианом H . Мы разделим амплитуду каждой базисной компоненты начального состояния $|\Psi(0)\rangle$ на одинаковые кванты - малые порции. Для каждого такого кванта назначим его образ - квант амплитуды в аналогичном разбиении конечного состояния $|\Psi(t)\rangle$, причем сделаем это так, чтобы доля квантов, соответствующих переходу от состояния $|j\rangle$ к состоянию $|i\rangle$ была бы пропорциональна величине $|Re(U_{ij})| + |Im(U_{ij})|$, где $U_{ij} = \langle i|U_t|j\rangle$ - матричный элемент перехода $|j\rangle \rightarrow |i\rangle$ за время t , $U_t = \exp(-\frac{iHt}{\hbar})$. Здесь мы используем такую нестандартную норму комплексных чисел, так как собираемся работать не с вероятностями, а именно с амплитудами. Это определение нормы переходит в обычное, если все амплитуды одинаковы. Если величина модуля амплитуды $|\lambda_j|$ определяется как плотность базисных состояний в

¹Выразительная иллюстрация этого принципа дана в книге [2].

точке $|j\rangle$, а амплитуды всех базисных состояний одинакова, у нас получится согласование с нашим определением. При детерминистическом же описании у нас вообще будет только одно базисное состояние, которое будет переходить в другое, так что будет полное согласование.

Сделаем два замечания.

Замечание 1. Квантовую динамику плотности одной частицы, в случае обычного динамического гамильтониана, можно, теоретически, описать роением виртуальных частиц, который подчиняется уравнениям Гамильтона-Якоби с квантовым псевдопотенциалом Бома ([40]). Этот подход называется квантовой гидродинамикой де Бройля - Бома; он давно претендует на полную переформулировку квантовой механики как таковой, например, там объясняется наличие у частиц спина. Квантовая гидродинамика, теоретически, обобщается на ансамбли частиц, движущихся по закону квантовой механики с гамильтонианом, полученным стандартной процедурой из классических выражений для энергии. Квантовая гидродинамика де Бройля - Бома применима только к таким "квази-классическим гамильтонианам" и только в виде квантования вероятности появления той или иной "частицы" в данной области пространства-времени. Микро-причинность в квантовой гидродинамике ограничивается, таким образом, только такими гамильтонианами, и фаза волновой функции может быть рассчитана после усреднения по импульсам в каждой элементарной ячейке пространства-времени; это можно сделать только если вычислительный ресурс сконцентрирован на одной частице. В гамильтонианах типа Тависа-Каммингса динамические характеристики отдельных атомов отсутствуют вообще, и потому роение де-Бройля Бома не годится для установления свойств причинности в ТС-подобных моделях, как и вообще в моделях квантовых компьютеров.

Серьезным концептуальным недостатком квантовой гидродинамики является то, что здесь "экземпляры" одной реальной частицы, которые могут относиться к совершенно разным траекториям, к тому же взятым в разные моменты времени, "взаимодействуют" друг с другом по классическому закону, что уже совершенно непонятно. Этот подход ничего не дает в смысле упрощения расчетов для сложных систем - он их только усложняет.

Замечание 2. Амплитуды в виде отдельных квантов возможна в сложных системах, где велико число частиц, так что вероятность оказывается "размазанной" по огромному числу взаимно ортогональных базисных состояний. В том случае микро-причинность будет означать, что траектория всей системы однозначно определяется ее текущей конфигурацией, и вероятностный характер квантовой динамики превращается в строгий детерминизм. Поиск такой детерминированности может быть также связан с интерпретациями квантовой теории, в частности с так называемой контекстной зависимостью результатов экспериментов от окружения (см. [41]). Здесь важны точные формулировки, так как контекстная зависимость иногда ошибочно трактуется как введение "скрытых параметров" квантовой теории. В действительности, такая зависимость есть просто учет квантовой нелокальности запутанных состояний, подтвержденной в многочисленных экспериментах (см., например, [42],[43]).

Сначала мы покажем, что описание миркомира не может быть локальным. Затем

мы обсудим возможность введения микропричинности для связанных состояний, что будет косвенным доводом в пользу возможности детерминизма для сложных систем.

3.1 Квантовое дальное действие

Схема эксперимента, доказывающего наличие квантового мгновенного действия на расстоянии, была предложена Дж.Беллом в начале 60-х годов ([44],[45]); сами же эксперименты были проведены впервые в 1980-х годах А.Аспеком и А.Цайлингером ([42], [43], а также ссылки в работах [46] и [47]). В этих экспериментах запутанность проявляется не на ангстремных расстояниях, как в молекуле водорода, а на расстояниях в несколько сотен километров.

В эксперименте получают состояния вида $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ для фотонов, которые детектируются на расстояниях с несколько сотен километров между ними. Представим себе, что первый фотон детектируется наблюдателем Алисой, а второй - Бобом. Условия эксперимента таковы, что у Алисы есть две возможности выбрать детектор, то есть измерительный базис в пространстве состояний ее кубита, и у Боба - тоже две возможности. А именно, Алиса может выбрать собственные вектора эрмитова оператора σ_x или σ_z , а Боб: $(\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}$ или $(\sigma_x - \sigma_z)/\sqrt{2}$ соответственно. Поскольку у всех перечисленных операторов собственные значения только 1 или -1 , мы будем считать, что Алиса получила значение X или Y , а Боб - a или b соответственно, в вышеприведенном порядке. Например, можем условиться, что 1 означает, что детектируется фотон с горизонтальной поляризацией, а -1 - с вертикальной (относительно соответствующего положения детектора). Это эквивалентно выбору каждым участником эксперимента *наблюдаемой* (см. Главу 1) из двух возможностей, для каждой - с вероятностью $1/2$.

Определим случайную величину ξ как произведение результатов измерений Алисы и Боба, взятое со знаком минус, в том случае, когда выборы детекторов были Y и b соответственно, и произведение результатов со знаком плюс во всех других случаях. Значение такой величины получается простым умножением и надлежащим изменением знака, после того, как Алиса и Боб выяснили, какую ориентацию детекторов избрал каждый из них; в ходе самого измерения они не согласовывают своего выбора.

Алиса и Боб получают одну за одной пары бифотонов в состоянии $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ и производят свои испытания со случайно выбранными наблюдаемыми, составляя протокол экспериментов. Затем сходятся вместе и вычисляют значение случайной величины ξ , которая равна произведению значений наблюдаемых Алисы и Боба, если их выбор детекторов был: Y, a или X, b или Y, a , и произведению этих значений с обратным знаком, если выбор был Y, b .

При поверхностном взгляде может показаться, что X, Y, a, b есть случайные величины, с которыми можно оперировать, как с обычными числами. Временно примем такую точку зрения, и проведем некоторый несложный подсчет математического ожидания E величины ξ . Мы вынесем X и Y за скобки в выражении

$$E = Xa + Xb + Ya - Yb, \quad (3.1)$$

которое получится, если сложить все возможные результаты вычислений ξ . Тогда получится, что в одной скобке стоит 0, а в другой - число, по модулю равное 2. Тогда можно оценить E как $|E| = 2/4 = 1/2$, поскольку все четыре выбора ориентаций детектора равновероятны. Естественно, для случайных величин X, Y, a, b мы будем иметь точно такое же неравенство, причем безразлично, являются ли они зависимыми, или нет. Значит, и для математического ожидания $M(\xi)$ величины ξ мы получим неравенство

$$M(\xi) \leq 1/2, \quad (3.2)$$

которое называется неравенством Белла.

А теперь подсчитаем $M(\xi)$ для выписанных нами наблюдаемых с помощью квантово - механического правила $\langle A \rangle_\Psi = \text{tr}(\rho_\Psi A)$ определения среднего значения (собственных чисел) эрмитова оператора A в состоянии Ψ^2 . Несложный расчет³ покажет, что $M(\xi) = \frac{1}{4}2\sqrt{2}$ (множитель $1/4$ везде возникает из-за равновероятности выбора всех 4 комбинаций детекторов). Именно это и детектируется в эксперименте, к которому мы еще вернемся. В чем же дело? Где мы допустили ошибку в рассуждении? Очевидно, возможность ее совершить только одна: предположение о том, что результаты измерений Алисы и Боба выражаются как случайные величины X, Y, a, b использовалось нами нестрого, в силу того, что мы не применяли определения случайной величины. Сейчас мы восполним этот пробел, и увидим, как это приведет нас к новому пониманию смысла эксперимента с двумя запутанными фотонами.

Рассмотрим эксперимент более строго. Для этого напомним основные понятия колмогоровской теории вероятности. Она включает 3 объекта: вероятностное пространство, случайные величины, и их численные характеристики. Сначала определим центральное понятие: множество элементарных исходов. Это (у нас всегда конечно) множество

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\},$$

каждый элемент которого отражает всю сущность мира, играющую роль для рассматриваемого эксперимента. Это означает, что выбрав какой либо элемент $\omega_j \in \Omega$, мы автоматически выбираем исход любого эксперимента из рассматриваемого набора, включая положение детектора, состояние всех элементарных частиц в нем, а также всех параметров, которые мы даже не знаем, но которые определяют, каков будет исход эксперимента⁴.

В силу негибкой формы "запрета на скрытые параметры" в копенгагенской квантовой механике, мы в ее рамках не имеем возможности рассмотреть даже приближение множества Ω . Таким образом, точное рассмотрение квантово-механических задач для многих частиц обязано выходить за пределы копенгагенской квантовой теории. Выход за пределы подразумевает не нарушение законов, а рассмотрение сущностей, недоступных в копенгагенской теории. Можно выразиться иначе. Стандартные за-

²Оно вытекает из определения математического ожидания для собственных значений эрмитова оператора A : $\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$. Читателю предлагается а) доказать, что математическое ожидание наблюдаемой A в состоянии $|\Psi\rangle$ вычисляется по данной формуле, и б) приведенную в тексте формулу, исходя из данной.

³Надо рассмотреть все случаи ориентации детекторов, и для каждого составить редуцированную матрицу плотности нашего состояния, а затем применить правило полной вероятности.

⁴То обстоятельство, что мы не знаем структуры Ω , не играет никакой роли. Мы все равно должны рассматривать этот объект явно, если говорим о вероятностях.

дачи квантовой теории, подразумевающие использование аппарата волновых функций и проекций, не должны использовать скрытых параметров, то есть не должны касаться вероятностной структуры волновой функции. К стандартным относятся задачи о поведении одной квантовой частицы или сводящиеся к ним. Однако наша задача о запутанных фотонах не является стандартной, поскольку она касается уже двух частиц. Хотя запутанное состояние двух частиц в некотором смысле можно свести к одночастичному, но операторы наблюдения, используемые Алисой и Бобом существенно различные, и потому мы имеем дело с существенно не одночастичным квантовым состоянием. Иногда для решения таких задач хватает арсенала копенгагенской теории, но наш случай явно не относится к этой категории, и потому мы должны для нахождения решения использовать теорию вероятностей, рассмотрев множество элементарных исходов Ω . Ограничение стандартного формализма здесь в том, что мы должны считать это множество конечным; хотя в данном случае это никак не скажется на выводах.

На множестве S всех подмножеств Ω надо определить так называемую вероятность - функцию вида $P : S \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющую аксиомам вероятности: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для непересекающихся $A, B \in S$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Определить P очень просто: $P(A)$ есть частное от деления числа всех элементов A на k . Это иногда называют частотным определением вероятности.

Случайной величиной называется любая функция вида

$$\xi : \Omega \rightarrow R.$$

Мы можем вычислять математическое ожидание случайной величины ξ по стандартной формуле $M(\xi) = \sum_{x \in R} xP(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\})$.

Надо сразу сказать, что бессмысленно искать "объяснения" эксперимента с бифотонами, не прибегая к приведенному выше строгому определению вероятности. Единственная математически точная формулировка понятия "вероятность" вытекает из приведенного определения. Теперь рассмотрим, как этот арсенал применяется к рассматриваемой ситуации.

С точки зрения квантовой механики, состояние $|\Psi\rangle$ двух рассматриваемых фотонов представляет единый вектор в гильбертовом пространстве состояний. Это означает, что существует такое пространство элементарных исходов Ω , что все величины X, Y, a, b являются случайными величинами над этим пространством, то есть функциями от элементарных исходов: $X(\omega), Y(\omega), a(\omega), b(\omega)$.

Теперь мы должны переформулировать условия эксперимента на языке теории вероятностей. У нас есть следующая ситуация. Алиса и Боб, независимо друг от друга и совершенно случайным образом выбирают каждый какое-либо одно состояние детектора из имеющихся у него двух возможностей, сразу же после чего каждый фотодетектор детектирует попавший в него фотон (конкретный результат измерения есть 1, если получено состояние $|\epsilon_1\rangle$ из базиса собственных векторов оператора наблюдаемой, и -1 - если $|\epsilon_2\rangle$), - выбор из этих альтернатив осуществляется исходя из особенностей детектора). Это означает, что выбор ориентации детектора Алисой входит в некоторый объект ω_1 , а выбор ориентации детектора Боба входит в объект ω_2 , так что элементарный случайный исход одного эксперимента $\omega \in \Omega$ имеет

вид (ω_1, ω_2) . Если у фотонов есть какие-либо скрытые параметры, то параметры фотона, прилетевшего к Алисе, мы считаем входящими в ω_1 , а для фотона, прилетевшего к Бобу - в ω_2 . Таким образом, мы должны предположить, что $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, где множества Ω_1 и Ω_2 соответствуют выборам Алисы и Боба соответственно. Такое предположение выражает так называемую свободу воли у обоих участников эксперимента. Отсутствие свободы воли означало бы попросту то, что выбор, скажем, Алисы, автоматически определял бы и выбор Боба. В реальных экспериментах вопрос с ориентацией решается не людьми, а электроникой, исходя из таких событий, которые с точки зрения здравого смысла, обязаны быть независимыми (например, потоки посторонних фотонов из разных областей космического пространства). Свобода воли участников эксперимента является необходимым предположением, если мы занимаемся наукой.

Теперь рассмотрим, что есть случайные величины X, Y, a, b . Поскольку ω_1 автоматически определяет ориентацию детектора Алисы, обозначим через Ω_1^X такое подмножество Ω_1 , которое соответствует ориентации детектора X , и аналогично обозначим подмножества, соответствующие Y, a, b . При этом Ω_1 будет суммой непересекающихся подмножеств Ω_1^X и Ω_1^Y , а Ω_2 - суммой также не пересекающихся Ω_2^a и Ω_2^b . Мы должны принять, что результат детектирования Алисы есть случайная величина $\xi_1(\omega_1, \omega_2)$, а результат детектирования Боба есть случайная величина $\xi_2(\omega_1, \omega_2)$, так что общий результат есть декартово произведение $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, причем X есть ограничение функции $\xi(\omega_1, \omega_2)$ на область $\omega_1 \in \Omega_1^X$, Y есть ограничение функции $\xi(\omega_1, \omega_2)$ на область $\omega_1 \in \Omega_1^Y$, a есть ограничение функции ξ на область $\omega_2 \in \Omega_2^a$, и b - на область $\omega_2 \in \Omega_2^b$. Для того, чтобы сделать величины X, Y, a, b определенными на всем множестве элементарных исходов Ω , мы дополним их нулем в тех областях, где они не определены нами явно.

Определим случайную величину ξ так:

$$\xi(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \xi_1(\omega_1, \omega_2)\xi_2(\omega_1, \omega_2), & \text{если } \omega_1 \notin \Omega_1^Y \text{ или } \omega_2 \notin \Omega_2^b, \\ -\xi_1(\omega_1, \omega_2)\xi_2(\omega_1, \omega_2), & \text{если } \omega_1 \in \Omega_1^Y \text{ и } \omega_2 \in \Omega_2^b. \end{cases}$$

Тогда мы имеем: $\xi = Xa + Xb + Ya - Yb$.

Посчитаем ее матожидание по приведенному определению, выбрав частотное определение вероятности. У нас получится

$$M(\xi) = \frac{1}{k} \sum_{\omega_1, \omega_2} X(\omega_1, \omega_2)a(\omega_1, \omega_2) + X(\omega_1, \omega_2)b(\omega_1, \omega_2) + Y(\omega_1, \omega_2)a(\omega_1, \omega_2) - Y(\omega_1, \omega_2)b(\omega_1, \omega_2).$$

Отметим, что мы при этом пользуемся тем, что многие называют реализмом. Это означает, что мы имеем право неоднократно пользоваться ограниченным количеством букв ω_j так, что любые их комбинации будут соответствовать реальным экспериментам по детектированию фотонов. По иному это можно сформулировать как свободу воли при выборе из конечного набора вариантов реальности. Нетрудно убедиться, что с данным выражением для матожидания невозможно поступить так, как это было выше проделано с числами при доказательстве неравенства Белла (3.2), в силу наличия аргументов у случайных величин. Действительно, поскольку результат измерения одного из участников зависит от элементарных исходов для

них обоих, мы должны были бы вместо выражения (3.1) написать другое выражение: $E = Xa + X'b + Ya' - Y'b'$, и у нас не получилось бы вынесения за скобки общих множителей, то есть наше наивное рассуждение было бы неверным.

Однако предположим, что, помимо очевидного для нас реализма, у нас имеется еще и так называемая локальность. Кратко говоря, локальность означает, что результат измерения Алисы никак не зависит от ориентации детектора Боба и наоборот. Мы обсудим физический смысл локальности ниже. Формально локальность означает, что X и Y зависят только от ω_1 , а a и b - только от ω_2 . Тогда мы сможем проделать с выражением для математического ожидания тот же самый трюк, что и при доказательстве неравенства Белла. А именно, мы сгруппируем все слагаемые большой суммы в группы по 4 вида

$$X(\omega_1)a(\omega'_2) + X(\omega_1)b(\omega_2) + Y(\omega'_1)a(\omega'_2) - Y(\omega'_1)b(\omega_2),$$

состоящие из ненулевых членов, так что внутри каждой группы можно будет вынести X и Y за скобки, и так же как и выше доказать, что эта группа не превышает 2. Поскольку в группе задействуется 4 различных ω , мы получаем, что математическое ожидание ξ не превосходит $1/2$. То есть локальность ведет к выполнению неравенства Белла. Таким образом, мы пришли к выводу, что из эксперимента по детектированию бифотонов вытекает нелокальность квантовой механики.

Теперь рассмотрим нелокальность подробнее. Она означает, что случайные величины, относящиеся к Бобу, зависят не только от его компоненты элементарного исхода, но и от компоненты, принадлежащей Алисе, и наоборот, то есть все исходы X, Y, a, b зависят как от ω_1 , так и от ω_2 .

Как это может быть реализовано? Только так: есть некоторый объект $\tilde{\omega}$, который путешествует от Алисы к Бобу и обратно, перенося информацию о другой половине элементарного исхода соответствующего эксперимента. Если этот объект $\tilde{\omega}$ подчиняется ограничению релятивизма, и не может передвигаться быстрее света, то мы можем вывести ограничения на времена испускания бифотона источником и времен детектирования прибытия каждого из фотонов Алисой и Бобом. Пусть Δt - естественная неопределенность момента испускания бифотона источником, о которой мы предполагаем, что все бифотоны, время испускания которых лежит вне этого диапазона, не играют никакой роли для получения статистики в данном эксперименте. Наличие такого интервала есть непосредственное следствие соотношения неопределенности "энергия-время". Теперь мы предположим, что часы Алисы, Боба, и источника бифотона точно синхронизированы, и введем величину δt , равную разности момента срабатывания детектора и момента выбора его положения (то есть выбора между X и Y и между a и b). Тогда, если материальный объект $\tilde{\omega}$, переносящий информацию о другой половине элементарного исхода, подчиняется релятивизму, то должно выполняться неравенство

$$\Delta t + \delta t \geq d/c, \quad (3.3)$$

где d есть расстояние между Алисой или Бобом, и источником бифотонов, c скорость света.

Эксперименты свидетельствуют, что это неравенство нарушается для бифотонов, детектируемых на расстояниях в несколько сот километров, что имеет совершенно

фундаментальные следствия для квантовой теории. Действительно, нарушение (3.3) говорит о том, что $\tilde{\omega}$ не может быть скрытым параметром ни одного из фотонов.⁵ То есть $\tilde{\omega}$ непосредственно переносит информацию об ориентации детекторов от Алисы в Бобу или наоборот. Этот эффект принято называть "квантовой нелокальностью"; он непосредственно вытекает из стандартного квантового формализма, но в действительности, делает необходимым как раз переход от узких копенгагенских рамок к пост-квантовой теории, в которой случайные исходы ω должны обрести реальный смысл, а не служить лишь формальной цели - математической согласованности.⁶

Квантовая теория полностью согласуется с принципом релятивизма, согласно которому никакая информация не может перемещаться со скоростью, превосходящей скорость света. Формально это выражается в том, что статистика измерений Алисы никак не зависит от того, измеряет ли Боб свой кубит или нет. То есть с помощью запутанного квантового состояния невозможно передавать информацию, генерированную участниками эксперимента друг другу. Но мы только что выяснили, что это ограничение не распространяется на информацию об элементарных исходах в конкретных экспериментах о измерении квантовых состояний, когда они собраны воедино!

Из этого можно сделать только один вывод. Имеется своего рода административная система, взаимодействие с которой и определяет реальность. Это взаимодействие в точности соответствует взаимодействию пользователя с компьютером. Пользователь, то есть экспериментатор, определяет условия (положение детекторов), после чего административная система, работающая с элементарными исходами, выдает результат эксперимента. При этом время, потраченное административной системой на согласование заданных различными пользователями условий, не является реальным физическим временем.

Мы используем здесь программистскую терминологию, в которой административная система означает вполне определенную вещь, которая должна входить в пост-квантовый формализм, и потому не должна вызывать никаких иных ассоциаций. Нелокальность элементарных исходов ω говорит в пользу того, что эти исходы могут обрести реальный смысл именно для сложных систем и процессов, затрагивающих большие пространственные области. Для простых же систем, например, для одного единственного атома или даже молекулы нелокальность сама по себе не играет большой роли: она проявляется в достаточно тонком эксперименте, описанном нами, и эффект от нее для простых систем даже меньше релятивистских поправок.

Однако квантовое дальноедействие позволяет создавать удивительные протоколы информационного обмена, один из которых мы рассмотрим ниже.

⁵В реальных экспериментах, как правило, проверяют не нарушение (3.3), а непосредственно предотвращают обратное перенесение информации самими фотонами, выставляя заглушки после их прохождения.

⁶Познакомиться с различными точками зрения на квантовую нелокальность можно, например, по статьям из [48].

3.2 Квантовая телепортация

Квантовая телепортация - перемещение на расстояние неизвестного квантового состояния, причем при этом реально передается только классическая информация. Этот протокол был опубликован в работе [27]. Пусть у Алисы с Бобом есть ЭПР - связь: у каждого кубит, причем эта пара кубитов находится в состоянии $|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A0_B\rangle + |1_A1_B\rangle)$. А еще у Алисы есть дополнительный кубит, находящийся в неизвестном им обоим состоянии $|\psi_C\rangle = \lambda|0_C\rangle + \mu|1_C\rangle$, и Алиса хочет передать это неизвестное состояние $|\psi_C\rangle$ Бобу.

Если бы у Алисы было очень много образцов состояния $|\psi_C\rangle$, никакой проблемы бы не было: она могла бы осуществить квантовую томографию, проводя многочисленные измерения, и узнать λ и μ с высокой точностью. Но все дело в том, что состояние $|\psi_C\rangle$ - уникально, и томография не проходит.

Вот что делает Алиса. Сначала она реализует оператор $CNOT|C, A\rangle$, так что управляющий кубит - с неизвестным состоянием, а управляемый - ее половинка ЭПР - связи. Затем она делает над кубитом C операцию Адамара H . И наконец - измеряет оба своих кубита, посылая результат измерения Бобу. Этот результат - два бита: что получилось в кубите A и в кубите C . Этой информации Бобу достаточно, чтобы восстановить на своем кубите B состояние $|\psi_C\rangle$, которое было уничтожено Алисой в ходе ее манипуляций и измерений.

Выпишем последовательно квантовые состояния трех кубитов: A , B и C , получающиеся в ходе описанной процедуры.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A0_B\rangle + |1_A1_B\rangle)(|\lambda|0_C\rangle + \mu|1_C\rangle) = \\
& \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda|000\rangle + \lambda|110\rangle + \mu|001\rangle + \mu|111\rangle) \rightarrow_{CNOT} \\
& \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda|000\rangle + \lambda|110\rangle + \mu|101\rangle + \mu|011\rangle) \rightarrow_{H_C} \\
& \frac{1}{2}(\lambda|00\rangle(|0\rangle + |1\rangle) + \lambda(|11\rangle(|0\rangle + |1\rangle) \\
& \quad + \mu|10\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + \mu|01\rangle(|0\rangle - |1\rangle)) = \\
& \frac{1}{2}(\lambda|000\rangle + \lambda|001\rangle + \lambda|110\rangle + \lambda|111\rangle + \\
& \quad \mu|100\rangle - \mu|101\rangle + \mu|010\rangle - \mu|011\rangle).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Пусть Алиса получила результат $A = C = 0$. Тогда из результата преобразований (3.4) вытекает, что у Боба уже есть состояние $|\psi_C\rangle$, во всех иных случаях Бобу надо совершить над своим кубитом простую операцию, зависящую от присланного ему результата измерений Алисы, и он обретет это состояние на своем кубите (проверьте это самостоятельно!).

Итак, для того, чтобы Боб смог восстановить неизвестное состояние, оно должно сначала исчезнуть у Алисы.

Невозможность одновременного появления неизвестного, наугад выбранного состояния $|\psi_C\rangle$ у Алисы и у Боба невозможно. Клонирование квантовых состояний запрещено. Не существует унитарной операции, которая бы для любого состояния $|\psi\rangle$ выглядела бы как

$$U|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle. \tag{3.5}$$

Докажите это сами!

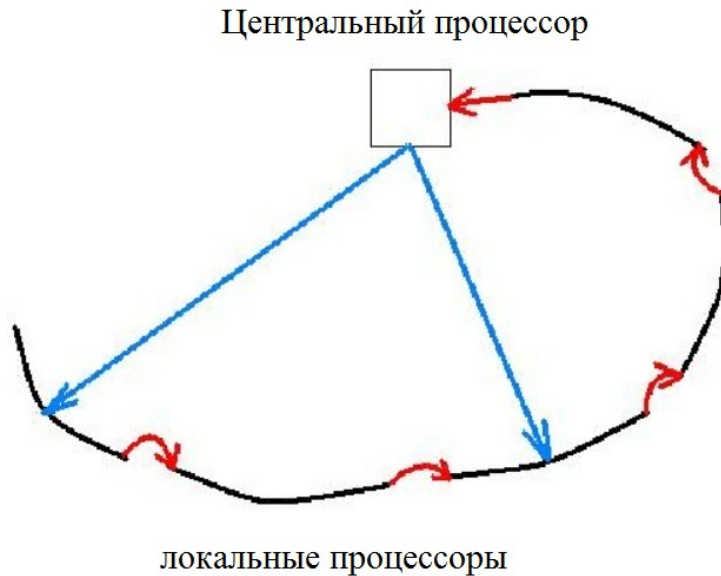


Рис. 3.1: Схема одностороннего управления

Телепортация именно передает неизвестное состояние по "линии связи" ЭПР типа, перемещая только классическую информацию.

3.3 Распределенные квантовые вычисления

Построение квантового компьютера - сложный и многосторонний процесс, и важную роль в нем играют ограниченные модели квантовых вычислений, например, квантовые ветвящиеся программы ([49]) или программы моделирования биохимии ([50].) Преимущество квантовых методов может заключаться не в ускорении вычислений в обычном смысле, а в использовании отдельных элементов квантовой природы для получения финального выигрыша в качестве полученного результата.

Здесь мы продемонстрируем, как нарушение неравенства Белла может помочь повысить эффективность некоторых распределенных вычислений. Пример, который мы приведем (см. [51]), искусственно построен и призван лишь иллюстрировать возможность практического использования удивительного свойства квантовой нелокальности; к тому же эффект от этого использования не слишком велик. Однако данный пример обладает схожестью с биологическим процессом роста сложных молекул с линейной организацией первичной структуры, и потому он говорит о том, что поиск дальнейших приложений квантовой нелокальности может быть плодотворным.

3.3.1 Одностороннее управление

Мы покажем, как эта цель может быть достигнута с использованием нарушения неравенства Белла. Рассмотрим модель распределенных вычислений с односторонним управлением, где все вычислительные устройства подразделяются на централь-

ный процессор (CPU) и удаленные периферийные устройства, способные непосредственно получать команды от CPU. Обратная передача информации от периферийных устройств к центральному процессору не происходит непосредственно, но только в виде последовательного трансфера через цепочку периферийных устройств, которые локально взаимодействуют друг с другом, как показано на рисунке 3.1. В примере, который мы разберем, использование запутанных состояний фотонов в управлении дает увеличение качества результата вычисления, превосходящее результат классического управления примерно в 1.138 раз. Это - задача синтеза двух удаленных цепочек, состоящих из отдельных звеньев, осуществляемого на двух периферийных устройствах.

Центральный процессор посылает сигнал к двум периферийным процессорам, каждый из которых отвечает за соответствующую подсистему всей системы. Например, CPU решает задачу синтеза на одной подсистеме некоторого полимера A , имеющего особую активность, и, одновременно - задачу синтеза другого полимера B , который подавляет (или, наоборот, интенсифицирует) данную активность, уже на другой подсистеме. CPU посылает соответствующий сигнал на обе подсистемы, и переключается на другие задания, скажем, на синтез другой пары полимеров A' и B' .

Что случилось бы, если периферийные процессоры стали бы посылать сигналы друг другу непосредственно? Пусть у нас есть m подсистем, каждая из которых управляется своим собственным процессором. Для корректной адресации сигналов между всеми возможными парами (их порядка m^2) мы должны были бы загрузить CPU этой работой. Центральный процессор вынужден был бы ждать время cD для каждой пары, где D - расстояние между периферийными процессорами, c - скорость света, прежде чем переключиться на следующее задание. Если m достаточно велико (в реальных био-системах это число очень велико), такая схема вычислений, основанная на адресации сигналов через CPU привела бы к фатальной задержке управления, что сделало бы всю схему непригодной.

Мы, таким образом, приходим к необходимости одностороннего управления, когда CPU посылает сигналы периферийным процессорам немедленно, не ожидая отклика от них. Обратная информация же поступает на CPU не непосредственно, а через цепочку посредников, как в клеточном автомате. Эта форма организации обработки информации может быть эффективна в живых организмах, так как в них центральная нервная система, играющая роль CPU, должна быть свободна от рутинной работы по управлению метаболизмом.

3.3.2 Квантовые бифотонные сигналы

В рассматриваемой ситуации использование CPU бифотонов (запутанных состояний фотонов) дает преимущество по сравнению с чисто классическим CPU. Для того, чтобы продемонстрировать это, мы рассмотрим следующую абстрактную задачу. Предположим, что требуется синтезировать две полимерные молекулы, химическая структура которых имеет вид $C_1 = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_M^1)$, $C_2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_M^2)$, так что они состоят из моноблоков двух типов: a и b : $c_i^j \in \{a, b\}$ (см. рисунок 3.2).

Качество такой взаимной сборки двух полимеров проверяется наложением го-

товых цепочек друг на друга: первая C_1 на вторую C_2 , и критерий качества есть степень склейки этих цепочек. Каждый моноблок имеет внешнюю (выпуклую) и внутреннюю (вогнутую) поверхности, где последняя снабжена специальным шариком, расположенным в ее центре. В фиксированной позиции два моноблока могут склеиться в одном из следующих случаев: 1) их поверхности или половины поверхностей полностью совмещаются вертикальным смещением, или 2) их центральные шарики при таком сдвиге оказываются в одной точке, как показано на рисунке 3.2.

Физическая структура полимера, от которой зависит склейка, определяется не только последовательностью моноблоков в цепочке; склейка зависит также от дополнительной опции: их точного расположения относительно друг друга в цепочке. Соседние моноблоки в полимере соединены гибкой связью, которая может либо сжаться на dx , что составляет четверть длины моноблока, либо растянуться на такую же длину. Мы в этих случаях скажем, что моноблок сдвинут назад или вперед соответственно относительно положения равновесия связи. В ходе синтеза моноблоки устанавливаются с этими ограничениями и их позиции фиксируются. Затем две цепочки накладываются друг на друга и для каждой пары налегающих моноблоков устанавливается наличие склейки. Из принятого ограничения вытекает, что если в такой паре налегающих моноблоков они были сдвинуты в одну сторону, они склеиваются так же, как если бы сдвигов не было; а если в разные - результирующий сдвиг составляет половину длины моноблока.

После этого вычисляется число склеенных пар наложенных друг на друга моноблоков и это число считается численной характеристикой качества сборки пары цепочек.

Синтез цепочек происходит как последовательное присоединение к каждой из существующих цепочек нового моноблока - того, который первым появился в точке сборки одной и другой цепочки. Моноблоки берутся из среды, окружающей точки роста, где они находятся в хаотическом движении и оба типа распределены поровну. При этом можно сдвинуть вновь присоединенный моноблок либо назад, либо вперед на расстояние dx . Мы обозначим сдвиг вперед через $+$, сдвиг назад - через $-$. Каждая j -я пара моноблоков в обеих цепочках, наложенных друг на друга после синтеза, соответствуют, таким образом, четверке $c_j^1 c_j^2 s_j^1 s_j^2$, где последние два члена являются сдвигами $s_j^{1,2} \in \{+, -\}$.

Из наших правил (см. рисунок 3.2) следует, что склейка соответствует парам наложенных моноблоков вида: $aa++(--)$, $ab++(--)$, $bb++(--)$, $ba+-(-+)$, тогда как пары иного вида: $aa+-(-+)$, $ab+-(-+)$, $bb+-(-+)$, $ab++(--)$ склейки не дают. Отметим несимметричное поведение моноблоков типа a и b : пары ab и ba склеиваются по-разному при одинаковых сдвигах. Эта асимметрия выглядит как асимметрия в неравенстве Белла, что и даст нам повышение качества результирующей склейки при бифотонном управлении по сравнению с классическим управлением.

Мы предполагаем, что рост полимера C_1 идет в одной точке, а рост C_2 - в другой, причем эти точки разделены большим расстоянием (например, происходят в разных странах). Задача в том, чтобы организовать этот синтез так, чтобы число несклеенных пар наложенных моноблоков была бы минимальной, или, иначе говоря, чтобы число склеек было максимальным.

Подобная задача может возникнуть при моделировании синтеза гена и антигена

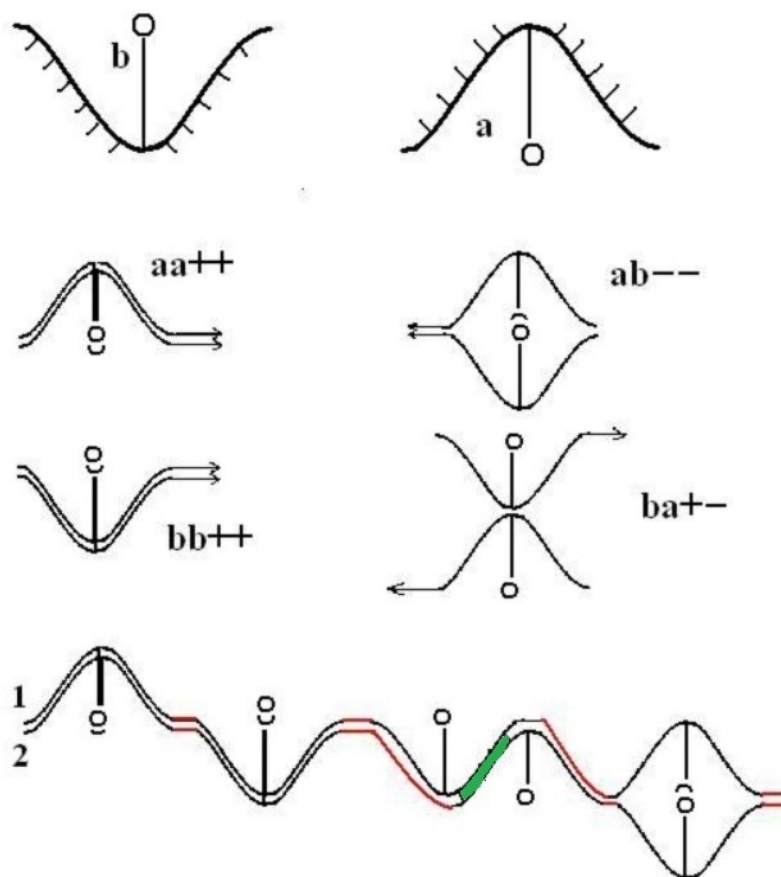


Рис. 3.2: Наложение двух полимеров. Стрелки обозначают направление растяжения связей (красный цвет) между соседними моноблоками при синтезе полимера. Наложения вида $aa++(--)$, $ab++(--)$, $bb++(--)$, $ba+-(-+)$ дают склейку, остальные склейки не дают. Внизу все пары дают склейки.

в разных живых клетках. Мы можем создать информационный канал управления ими из одного центра; правда, при большой дистанции между точками сборки такое управление способно замедлить сам процесс сборки, что для реальных полимеров представляет отдельную проблему, выходящую за рамки нашей модели.

Покажем, как использовать бифотонное управление процессом одновременного синтеза для получения квантового превосходства.

Итак, для минимизации критических (несклеенных) пар моноблоков мы используем сигналы CPU в виде EPR состояний $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, и подсчитаем число критических пар, возникающих при таком управлении. Если бы управление было классическим, в обозначениях из предыдущего параграфа мы имели бы неравенство Белла

$$E(a_1b_2 + b_1b_2 + a_1a_2 - b_1a_2) \leq 2. \quad (3.6)$$

Примем следующее соглашение. Нижний индекс обозначает точку сборки (номер полимера) 1 или 2. Буква a или b обозначает тип моноблока, присоединяемого к цепочке, знак соответствует направлению сдвига этого моноблока, как мы условились. Результат присоединения моноблоков в обеих точках сборки определен, если для 1 и 2 нижнего индекса мы имеем во-первых, букву a или b , и во-вторых, знак сдвига $+$ или $-$. Буква a или b всегда определяет тип моноблока, ближайшего к точке сборки в данный момент.

Работающий на принципах классической физики центральный процессор может, таким образом, управлять сборкой только выбирая знак сдвига $+$ или $-$ в обеих точках сборки. CPU выбирает эти знаки одновременно, так что никакое ожидание прохождения сигнала между точками сборки не может замедлить процесс: информация о знаке появляется в обеих точках одновременно, и как раз в момент, когда она нужна. Если бы мы допустили задержку по времени, можно было бы сделать сборку вообще идеальной, избежав критических пар совсем.

Для классического типа корреляции между выбором знаков мы имеем неравенство Белла. Для каждого шага процесса мы введем индекс критичности $Cr = +1$, если наложение соответствующих моноблоков некритично (есть склейка), и $Cr = -1$ в противном случае. Нас интересует результирующее число некритических наложений по всей длине цепочек синтезированных полимеров: $NonCr$; наша цель - сделать это число максимальным.

Для одной пары моноблоков мы имеем $NonCr = \frac{1}{2}(1 + Cr)$. Так как все комбинации aa, ab, ba, bb для обеих точек синтеза имеют одинаковые вероятности $1/4$, для среднего значения $E(Cr)$ индекса критичности мы имеем

$$E(Cr) = \frac{1}{4}(a_1b_2 + b_1b_2 + a_1a_2 - b_1a_2), \quad (3.7)$$

где буква a или b с индексом обозначает случайную величину, соответствующую выбору типа моноблока со знаком ± 1 , зависящим от знака сдвига, выбранного для нее.

Для классического управления ввиду неравенства Белла для $E(Cr)$ вида (3.7)

среднее число критических наложений удовлетворяет неравенству

$$E(NonCr) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{4}\right) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

В случае квантового бифотонного управления ситуация будет иной. Здесь мы не можем рассматривать a_1 и b_1 как случайные величины, определенные на отдельных множествах элементарных исходов для a_2 , b_2 , то есть оценка (3.6) не будет следовать из очевидного выражения $a(X + Y) + b(X - Y) \leq 2$ для чисел $a, b, X, Y = \pm 1$; мы здесь должны писать $a_1 b_2 + b_1 b'_2 + a'_1 a_2 - b'_1 a'_2$ вместо левой части неравенства (3.6), что делает данное неравенство неверным.

Для бифотонного управления наши случайные величины определены на одном и том же множестве элементарных исходов, мы не имеем неравенства Белла и должны считать вероятности напрямую, используя правило Борна.

Пусть для каждой из точек сборки у нас имеется фотодетектор, который может быть мгновенно ориентирован в соответствии с наблюдаемыми, которые мы ассоциируем с a и b . Для первой и второй точек сборки эти наблюдаемые пусть имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_x, & b_1 &= \sigma_z, \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_z), & b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) \end{aligned} \quad (3.8)$$

соответственно. Здесь мы не рассматриваем интересный вопрос о практической реализации таких наблюдаемых.

Условимся, что тип текущего моноблока определяет положение детектора для обеих точек и знак сдвига моноблока есть значение соответствующей наблюдаемой. Так как все комбинации типов моноблоков aa, ab, ba, bb равновероятны, мы можем использовать формулу (3.7) для среднего значения индекса критичности.

Теперь имеем: $E = E(a_1 b_2 + b_1 b_2 + a_1 a_2 - b_1 a_2) = E(a_1 b_2) + E(b_1 b_2) + E(a_1 a_2) - E(b_1 a_2)$. Используя определение наблюдаемых (3.8) и применяя правило вычисления средних $\langle A \rangle_\psi = \text{tr}(A\rho_\psi)$ для всех наблюдаемых A , взятых из (3.8), мы найдем $E = 2\sqrt{2}$ и для среднего значения числа некритических наложений (склеек) мы получим значение $E(NonCr) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{4}\right) \approx 0.85$. Итак, использование EPR пар фотонов в управлении сборкой дает существенный выигрыш в качестве - немного более 1.138 для такой формулировки задачи.

3.4 Дискретность амплитуд

Длительная история экспериментов по квантовому компьютерингу показала необходимость введения ограничений на размерность гильбертовых пространств, которые составляют основу формализма квантовой теории. Эту размерность принято считать неограниченной и даже бесконечной, что приводит к конфликту с математическим анализом, в виде, например, ненормируемости собственных функций основных операторов: координаты и импульса.

Более того, стремление зерна разрешимости классического пространства состояний dx, dt , (или dE, dp , что эквивалентно, так как переход от координатно-временному базису к базису на энергии-импульсе сохраняет зернистость) к нулю и физически некорректно. Зависимость зарядов и масс элементарных частиц от этого зерна диктуется ультрафиолетовой расходимостью рядов амплитуд квантовой электродинамики, сложность процессов которой нарастает с уменьшением этого зерна. Корректность перенормировок (фактически для одного заряда) - нетривиальная математическая теорема, впервые доказанная только в работе [52].

В простых задачах, которые решались копенгагенской механикой 20 века, эти тонкости можно было игнорировать, однако при попытке применить квантовую теорию к по-настоящему сложным процессам в химии и ядерной физике (а в перспективе - и к живой материи), что является целью проекта квантового компьютера, неадекватность математического аппарата гильбертовых времен становится фундаментальным препятствием. С ним сталкиваются все эксперименты по масштабированию квантовых процессоров, работающих удовлетворительно лишь для нескольких кубитов.

Физика квантового компьютера не может строиться на основе традиционного формального аппарата, она нуждается в явной формулировке ограничений на сложность состояний, причем ограничений, которые связывали бы копенгагенскую теорию с миром сложных систем, к которым принадлежит квантовый компьютер при его правильно понимаемом масштабировании.

Мы также не можем считать амплитуду бесконечно делимой, так как набор статистики для определения вектора состояния, не представляющий проблему для модельных задач старой квантовой механики отдельных атомов, становится невозможным для сложных систем. В этих системах состояния, определяемые с ангстремной точностью, являются уникальными, и, как правило, невозпроизводимыми, в силу огромной сложности окружения.

С другой стороны, представление о фундаментальном недетерминизме, лежащее в основе копенгагенской теории, не соответствует реальности для очень сложных систем, где мы имеем дело с удивительной силы предопределенностью, источником которой является молекула ДНК. Поэтому важно наметить в квантовом формализме, от которого нельзя отказаться, естественные пути ограничения сложности и введения детерминизма. Интересно, что представление о детерминистических траекториях помогает понять работу даже таких процессов, как вычисление по алгоритму Гровера, где существо копенгагенской механики проявляется наиболее ясным образом.

Изменение вектора состояния происходит из-за различной степени конструктивности возникающей интерференции между всевозможными отдельными траекториями, что образно показано в книге Р.Фейнмана [2]. Неясным остается только то, какой объект перемещается по этим "всевозможным траекториям"? Из матричной формулировки квантовой динамики следует, что этот объект - порция амплитуды - обязан разделяться на сколь угодно малом отрезке времени на несколько частей, что исключает детерминизм.

Мы покажем, что можно избежать такого ветвления, приписав с самого начала любому кванту амплитуды вполне определенную траекторию, так что его "судьба" будет совершенно определенной, а результирующий вектор состояния получится после сложения квантов и уничтожения некоторыми квантами друг друга - строго по-

парно, то есть в результате интерференции. При этом траектория отдельных квантов будет соответствовать выбранному гамильтониану.

Данный результат нетривиален, так как позволяет доказать, например, теорему о явной структуре темных состояний ансамблей двухуровневых атомов в оптической полости ([35], см. Приложение). Однозначность траектории порции амплитуды, определяемая для произвольной матрицы эволюции, отличается от детерминизма Бома ([40]): там квантуется вероятность, а не амплитуды, как у нас.

Минимальный размер кванта амплитуды - зерно амплитуды, определяется максимальной допустимой размерностью гильбертова пространства состояний. Зерно амплитуды представляет наиболее простое ограничение на копенгагенский формализм, выражающееся в предельной размерности гильбертова пространства, в котором алгоритм Гровера правильно работает. Нахождение этой размерности, таким образом, становится основной задачей экспериментальных работ по квантовому компьютеру после минимальной отладки элементарных гейтов. Алгоритм Гровера можно использовать для сравнения физически разных процессов по применимости к ним квантового формализма; это сделано ниже для простого примера задач из электродинамики и ядерной физики.

Ненулевой размер зерна амплитуды влечет существование неожиданного эффекта: возможности быстрого нахождения решения переборной задачи на квантовом компьютере для граничного числа кубитов, для которого размерность пространства состояний достигает предельного возможного значения.

Введение зерна разрешения амплитуды позволяет заполнить формальный пробел в формализме копенгагенской теории, в котором измерения трактуются как коллапс волнового вектора, о свойствах которого иногда говорят как о некой "оркестрованности", связывая процедуру измерения с актом самосознания ([53]), что уводит от развития физических представлений о материи в область спекуляций. Коллапс вектора состояния связан как раз с зерном амплитуды; измерение происходит ровно в тот момент, когда достигается максимальная размерность пространства состояний Q ядра квантовой системы, или, что то же самое, когда актуальная величина амплитуды достигает предельного значения - зерна. Эта трактовка полностью согласуется с представлением о декогерентности как о контакте системы с веществом окружения, при котором происходит резкое расширение пространства состояний, то есть с концепцией открытой квантовой системы ([19]).

Предлагаемое ограничение гильбертова формализма позволяет существенно упростить компьютерное моделирование динамики сложной квантовой системы, заменив логически неуклюжее понятие матрицы плотности смешанного состояния вектором в пространстве ограниченной размерности, постоянно подвергаемым процедурой редукции, при которой слишком малые амплитуды просто уничтожаются. Такая редукция открывает новые перспективы для квантового компьютера, однако у этого есть своя цена. Базисы, в которых можно рассматривать волновой вектор, становятся неэквивалентными. Эта потеря алгебраической стройности - необходимая плата за возможность рассматривать сложные системы на квантовом уровне.

3.5 Равновесные состояния

Мы начнем с описания классов состояний, для которых квантование амплитуды вводится наиболее наглядным образом.

Для комплексного числа $z = a + ib$, $a, b \in R$ введем обозначение $\{z\} = |a| + |b|$. Пусть $|j\rangle$ - какой-либо базисный вектор, $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Определим $\{\psi\} = \sum_{i=0}^{N-1} \{\langle i|\psi\rangle\}$.

Пусть A - линейный оператор. Определим $|\psi_j\rangle = A|j\rangle$. Назовем вектор состояния $|\Psi\rangle$ равновесным относительно оператора A , если для всех входящих в него базисных компонент $|j\rangle$ все числа $\{\psi_j\}$ одинаковы.

В качестве примера рассмотрим гамильтониан одномерной частицы, движущейся в потенциале $V: H = \frac{p^2}{2m} + V$. Урежем матрицу этого гамильтониана, предположив, что нет слишком длинных переходов данной частицы в пространстве. Тогда равновесными состояниями в координатном базисе для этого гамильтониана будут в точности такие состояния $|\Psi\rangle$, все базисные компоненты которых имеют одинаковый потенциал (докажите это, используя то обстоятельство, что оператор кинетической энергии имеет идентичный вид для всех базисных состояний в силу однородности пространства классических состояний).

Важным классом многочастичных равновесных состояний являются связанные состояния. Вот пример такого состояния. Рассмотрим k двухуровневых атомов в оптической полости, удерживающей фотоны с энергией перехода между основным и возбужденным уровнями атомов. Выберем базис, состоящий из векторов вида $|n\rangle_{ph}|m_1, m_2, \dots, m_k\rangle_{at}$, где n - число фотонов в полости, $m_j \in \{0, 1\}$ - состояние атома j , основное и возбужденное. Пусть g_j , $j = 1, 2, \dots, k$ - силы взаимодействия атомов с полем. Тогда динамика системы атомов и поля при условии $g_j/\hbar\omega \ll 1$, где ω - частота полости, будет подчиняться уравнению Шредингера с гамильтонианом Тависа-Каммингса в приближении RWA:

$$H_{TC}^{RWA} = \hbar\omega(a^+a + \sum_{j=1}^k \sigma_j^+ \sigma_j) + a^+ \bar{\sigma} + a \bar{\sigma}^+, \quad \bar{\sigma} = \sum_{j=1}^k g_j \sigma_j, \quad (3.9)$$

где a, a^+ - стандартные полевые операторы уничтожения и рождения фотона, а σ_j, σ_j^+ - атомные операторы релаксации и возбуждения атома j . Связные состояния в такой системе будут для $k = 2$ только при $g_1 = g_2$, и это будет либо одно из базисных, либо состояния $|n\rangle_{ph}(\alpha|10\rangle_{at} + \beta|01\rangle_{at})$, из которых во всех, кроме синглетного состояния $\beta = -\alpha$ атомы будут взаимодействовать с полем. Все такие состояния будут равновесными.

Общее определение связности выглядит так.

Пусть H - гамильтониан в пространстве состояний n кубитов. Если кубит ассоциируется с реальной или виртуальной двухуровневой частицей, H может быть, например, гамильтониан Тависа-Каммингса или какая-то его модификация. Пусть S_n - группа перестановок кубитов, которые естественным образом продолжены до операторов на всем пространстве квантовых состояний \mathcal{H} , а именно: на базисных состояниях перестановка $\eta \in S_n$ действует непосредственно, а $\eta \sum_j |j\rangle = \sum_j \eta|j\rangle$.

Обозначим через G_H подгруппу S_n , состоящую из всех перестановок кубитов τ , таких что $[H, \tau] = 0$. Пусть $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ - подмножество базисных состояний n -кубитной системы. Его линейную оболочку $L(A)$ назовем связным относительно H подпространством, если для любых двух состояний $|i\rangle, |j\rangle \in A$ существует перестановка кубитов $\tau \in G_H$, такая что $\tau(i) = j$. Состояние $|\Psi\rangle$ n -кубитной системы назовем связным относительно H , если оно принадлежит связному относительно H подпространству, причем $H|\Psi\rangle \neq 0$.

Связность состояния означает, что все его ненулевые компоненты получаются одна из другой перестановками тех частиц, которые ведут себя относительно данного гамильтониана одинаковым образом. Рассмотренный выше пример состояния $|n\rangle_{ph}(\alpha|10\rangle_{at} + \beta|01\rangle_{at})$ будет, очевидно, связным, так как перестановка атомов, одинаково взаимодействующих с полем, не меняет гамильтониана. Состояния же вида $|n\rangle_{ph}(\alpha|10\rangle_{at} + \beta|01\rangle_{at} + c|00\rangle_{at} + d|11\rangle_{at})$, при ненулевых значениях амплитуд a, b, c, d будут не связными.

Предложение.

Если $|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle$ - связное относительно H , то любые два столбца матрицы H с номерами j_1, j_2 , такими что λ_{j_1} и λ_{j_2} ненулевые, отличаются друг от друга только перестановкой элементов. То же самое верно и для матрицы унитарной эволюции $U_t = \exp(-\frac{i}{\hbar} Ht)$.

Действительно, для таких базисных состояний j_1 и j_2 , согласно определению H -связности, существует $\tau \in G_H$, такое что $j_2 = \tau(j_1)$. Столбцы с номерами j_1, j_2 состоят из амплитуд состояний $H|j_1\rangle$ и $H|j_2\rangle$ соответственно. Из условия коммутации имеем $\tau H|j_1\rangle = H\tau|j_1\rangle = H|j_2\rangle$, и это как раз и означает, что столбец j_2 получается из столбца j_1 перестановкой элементов, индуцированной τ . Переходя к матрице эволюции U_t , мы видим, что соотношение коммутации $\tau U_t |j_1\rangle = U_t \tau |j_1\rangle = U_t |j_2\rangle$ будет выполняться и для нее, что и требуется. Предложение доказано.

Из Предложения следует, что связные относительно гамильтониана H состояния являются равновесными относительно H и относительно оператора эволюции $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar} Ht}$, соответствующего этому гамильтониану.

3.6 Кванты амплитуды

Наша цель - показать, что если состояние $|\Psi\rangle$ является равновесным относительно оператора эволюции U_t , то амплитуды всех базисных состояний в $|\Psi\rangle$ можно разбить на малые порции - кванты амплитуды, так что для каждого кванта будет однозначно определена его траектория при действии U_t на заранее фиксированном отрезке времени t , в частности, будет однозначно определено, и то, с каким именно другим квантом амплитуды он сократится при суммировании амплитуд для получения последующего состояния.

Этот факт справедлив и для произвольного оператора A , для которого мы и будем формулировать квантование амплитуды.

Пусть $|\Psi\rangle$ - произвольное равновесное относительно A состояние, разложение которого по базисным имеет вид

$$|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle. \quad (3.10)$$

Мы введем важное понятие кванта амплитуды как простую формализацию превращения малой порции амплитуды между различными базисными состояниями при умножении вектора состояния на матрицу A . Пусть $T = \{+1, -1, +i, -i\}$ - множество из 4 элементов, которые называются типами амплитуды: вещественным положительным, вещественным отрицательным, и аналогичными мнимыми. Произведение типов определяется естественным образом: как произведение чисел. Квантом амплитуды размера $\varepsilon > 0$ называется кортеж вида

$$\kappa = (\varepsilon, id, |b_{in}\rangle, |b_{fin}\rangle, t_{in}, t_{fin}), \quad (3.11)$$

где $|b_{in}\rangle, |b_{fin}\rangle$ - два различных базисных состояния системы атомов и фотонов, id - уникальный идентификационный номер, выделяющий данный квант среди всех других, $t_{in}, t_{fin} \in T$. Переход вида $|b_{in}\rangle \rightarrow |b_{fin}\rangle$ называется переходом состояний, $t_{in} \rightarrow t_{fin}$ - переходом типов. Выберем идентификационные номера так, что при их совпадении все остальные атрибуты кванта тоже совпадали, то есть идентификационный номер однозначно определяет квант амплитуды. При этом должно существовать бесконечное множество квантов с любым набором атрибутов, за исключением идентификационного номера. Таким образом, мы будем отождествлять квант амплитуды с его идентификационным номером, не оговаривая этого в дальнейшем. Введем обозначения:

$$t_{in}(\kappa) = t_{in}, \quad t_{fin}(\kappa) = t_{fin}, \quad s_{in}(\kappa) = b_{in}, \quad s_{fin}(\kappa) = b_{fin}.$$

Переходы состояний и типов квантов амплитуды фактически указывают, как должно изменяться данное состояние во времени, и их выбор зависит от выбора A ; размер кванта амплитуды указывает точность дискретного приближения действия этого оператора с помощью квантов амплитуды.

Множество θ квантов амплитуды размера ε назовем квантованием амплитуды этого размера, если выполнено следующее условие:

Q. В множестве θ не существует таких квантов амплитуды κ_1 и κ_2 , что их переходы состояний одинаковы, $t_{in}(\kappa_1) = t_{in}(\kappa_2)$ и при этом $t_{fin}(\kappa_1) = -t_{fin}(\kappa_2)$, а также не существует таких квантов амплитуды κ_1 и κ_2 , что $s_{in}(\kappa_1) = s_{in}(\kappa_2)$ и $t_{in}(\kappa_1) = -t_{in}(\kappa_2)$.

Условие **Q** означает, что при переходе, описываемом символом " \rightarrow " итоговое значения кванта амплитуды не может сократиться с итоговым значением подобного ему кванта амплитуды, а также что кванты амплитуды не сокращаются друг с другом непосредственно в записи исходного состояния.

Квантование амплитуды θ задает пару квантовых состояний

$$|\theta_{in}\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle, \quad |\theta_{fin}\rangle = \sum_i \mu_i |i\rangle, \quad (3.12)$$

по естественному правилу: для любых базисных состояний $|j\rangle$, $|i\rangle$ должны выполняться равенства

$$\lambda_j = \langle j|\theta_{in}\rangle = \varepsilon \sum_{\kappa \in \theta: s_{in}(\kappa)=j} t_{in}(\kappa), \quad \mu_i = \langle i|\theta_{fin}\rangle = \tilde{\varepsilon} \sum_{\kappa \in \theta: s_{fin}(\kappa)=i} t_{fin}(\kappa), \quad (3.13)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ - некоторый нормировочный коэффициент, так что состояние $|\theta_{fin}\rangle$ имеет единичную норму, а $|\theta_{in}\rangle$ - произвольную ненулевую. Коэффициент $\tilde{\varepsilon}$ не обязан совпадать с ε , потому что при квантовании амплитуды обычная норма вектора состояния, вообще говоря, не сохраняется; если бы мы взяли $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, то введенная нами величина $\{|\Psi\rangle\}$ при переходе $|\theta_{in}\rangle \rightarrow |\theta_{fin}\rangle$ могла бы только уменьшиться - это происходит в точности из-за того, что некоторые кванты амплитуды "сокращаются" друг с другом во второй сумме из формулы (3.13).

Зафиксируем размерность $\dim(\mathcal{H})$ пространства состояний, и будем делать оценки (сверху) рассматриваемых положительных величин: времени и размера кванта амплитуды с точностью до порядка величины, считая все константы зависящими только от независимых констант: $\dim(\mathcal{H})$ и от минимальной и максимальной абсолютных величин элементов матрицы A . При этом термин "строгий порядок" будет означать оценку как сверху, так и снизу положительными числами, зависящими только от независимых констант.

Для квантования амплитуды θ и номеров i, j базисных состояний через $n_{i,j}(\theta)$ обозначим число элементов множества $\mathcal{N}_{i,j}(\theta) = \{\kappa \in \theta : s_{in}(\kappa) = j, s_{fin}(\kappa) = i\}$.

Пусть $\theta(\varepsilon)$ - некоторая функция, отображающая некоторую последовательность положительных чисел ε , сходящуюся к нулю, в квантования амплитуды размера ε . Такую функцию будем называть параметрическим квантованием амплитуды.

Параметрическое квантование амплитуды $\theta(\varepsilon)$ называется согласованным с оператором A , если существует такая функция $c(\varepsilon)$, что для любых базисных состояний i, j

$$c(\varepsilon)n_{i,j}(\theta(\varepsilon)) \rightarrow \{\lambda_j\}\{\langle i|A|j\rangle\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (3.14)$$

для λ_j , определенных в (3.13).

Если A - оператор эволюции U_t , то наличие параметрического квантования амплитуд $\theta(\varepsilon)$, согласованного с A , является совершенно не тривиальным свойством квантовых состояний $|\theta_{in}(\varepsilon)\rangle$, говорящим о том, что двостояний возможно введение скрытого параметра, соответствующего динамике, задаваемой матрицей эволюции U_t , и делающего квантовую эволюцию U_t детерминистической. Таким параметром будет квант амплитуды $\kappa \in \theta(\varepsilon)$, где точность детерминистического описания определяется величиной ε .

Теорема о квантовании амплитуды.

Пусть A - произвольная матрица. Для всякого равновесного относительно A состояния $|\Psi\rangle$ существует параметрическое квантование амплитуд $\theta(\varepsilon)$, согласованное с оператором A такое, что

$$|\theta_{in}(\varepsilon)\rangle \rightarrow |\Psi\rangle, \quad |\theta_{fin}(\varepsilon)\rangle \rightarrow A|\Psi\rangle, \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (3.15)$$

Доказательство.

Пусть задано равновесное относительно A состояние $|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle$ и число $\varepsilon > 0$.

Для $|j\rangle$ с ненулевыми $\lambda_j \neq 0$ пусть

$$\lambda_j = \langle j|\Psi\rangle \approx \underbrace{\text{sign}_{re}(\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon)}_{M_j} + \underbrace{\text{sign}_{im}i(\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon)}_{N_j}, \quad (3.16)$$

где $\text{sign}_{re}\varepsilon M_j + \text{sign}_{im}i\varepsilon N_j \approx \lambda_j$ есть наилучшее приближение амплитуды λ_j с точностью ε ; M_j, N_j - натуральные числа, $\text{sign}_{re} (\text{im}) = \pm 1$. Таким образом, первое соотношение стремления из (3.15) будет выполнено, и надо обеспечить выполнение второго соотношения при согласованности параметрического квантования с гамильтонианом.

Приближим каждый элемент матрицы эволюции так же, как мы приблизили амплитуды исходного состояния:

$$\langle i|A|j\rangle \approx \pm \underbrace{(\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon)}_{R_{i,j}} \pm i \underbrace{(\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon)}_{I_{i,j}}, \quad (3.17)$$

где $R_{i,j}, I_{i,j}$ - натуральные числа; действительную и мнимую части - с точностью ε каждую, а знаки перед действительной и мнимой частями выбираются исходя из того, что данное приближение должно быть максимально точным для выбранного ε .

Амплитуды результирующего состояния $A|\Psi\rangle$ получаются умножением всевозможных выражений (3.16) на всевозможные выражения (3.17):

$$\lambda_j \langle i|A|j\rangle \approx (\text{sign}_{re} M_j \varepsilon + i \text{sign}_{im} N_j \varepsilon) (\pm R_{i,j} \varepsilon \pm i I_{i,j} \varepsilon). \quad (3.18)$$

Раскроем в правой части выражения (3.18) скобки, но не будем производить сокращений. Каждое вхождение выражения ε^2 в амплитуды результирующего состояния после раскрытия скобок в правой части (3.18) будет получаться умножением определенного вхождения ε в правую часть (3.16) на определенное вхождение ε в правую часть (3.17). Проблема заключается в том, что одно и то же вхождение ε в (3.16) соответствует не одному, а нескольким вхождениям ε^2 в результат, и потому мы не можем сопоставить кванты амплитуды непосредственно вхождениям ε в (3.16).

Скольким вхождениям ε^2 в амплитуды состояния $A|\Psi\rangle$ из результата раскрытия скобок в (3.18) соответствует одно вхождение ε в приближение амплитуды $\lambda_j = \langle j|\Psi\rangle$ состояния $|\Psi\rangle$? Это число - кратность данного вхождения ε - равна $\sum_i (R_{i,j} + I_{i,j})$. Эти числа могут быть различными для произвольного оператора A и состояния $|\Psi\rangle$. Однако поскольку $|\Psi\rangle$ - равновесное относительно A , то $\sum_i (R_{i,j} + I_{i,j})$ для разных j будут одинаковыми.

Введем обозначение $\nu = \sum_i (R_{i,j} + I_{i,j})$ - это число вхождений ε в любой столбец из разложения матрицы (3.17); это число ν имеет порядок $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначим через $Z_{i,j}$ множество вхождений буквы ε в правую часть выражения (3.17), и пусть $Z_j = \bigcup_i Z_{i,j}$. Тогда число элементов в множестве Z_j будет равно ν .

Рассмотрим меньшее значение кванта амплитуды: $\epsilon = \varepsilon/\nu$. Подставим в выражение (3.16) вместо каждого вхождения ε его формальное разложение вида $\varepsilon = \overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu}$, получив разложение амплитуд исходного состояния на числа меньшего размера:

$$\lambda_j = \langle j|\Psi\rangle \approx \text{sign}_{re} \left(\overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu} + \overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu} + \dots + \overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu} \right) + \text{sign}_{im} i \left(\overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu} + \overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu} + \dots + \overbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}^{\nu} \right). \quad (3.19)$$

Пусть $W_1^j, W_2^j, \dots, W_{M_j+N_j}^j$ - множества вхождений буквы ϵ в правую часть выражения (3.19), отмеченные верхними фигурными скобками. В каждом из этих множеств ν элементов, как и в определенных ранее множествах Z_j . Поэтому мы можем построить для каждого такого множества W_s^j взаимно-однозначное отображение вида $\xi : W_s^j \rightarrow Z_j$. Для каждого вхождения ε в (3.16) естественно определяются его потомки - вхождения ϵ в (3.19); потомков для каждого вхождения будет ν .

Мы определим квантование амплитуд $\theta = \theta(\epsilon)$ так, что идентификаторы id квантов амплитуд $\kappa \in \theta$ будут просто вхождениями ϵ в разложения (3.19) для всех j . Определим, как требуется в (3.11), начальное состояние и начальный тип этого кванта как состояние и тип данного вхождения. Осталось определить переходы состояний и типов. Это определение дается следующим естественным образом.

Каждой паре вида $(w_s^j, \xi(w_s^j))$, где $w_s^j \in W_s^j$, поставим в соответствие переход состояний и переход типов естественным образом. А именно, переход состояний будет иметь вид $j \rightarrow i$ для такого i , что $\xi(w_s^j) \in Z_{i,j}$; переход же типов $t_{in} \rightarrow t_{fin}$ определяется так, что t_{in} есть тип вхождения⁷ w_s^j , а тип t_{fin} есть произведение типа вхождения t_{in} на тип вхождения $\xi(w_s^j)$. Множества W_s^j не пересекаются при разных парах j, s , поэтому мы считаем областью определения функции ξ все вхождения буквы ϵ в правую часть (3.19) (см. Рис. 3.3).

Пусть теперь переход состояний и типов для данного кванта $\kappa \in \theta$ соответствует отображению ξ в определенном выше смысле. Условие **Q** при этом будет выполнено, так как в выражении для матричного элемента (3.17) нет сокращающихся членов. Поэтому мы определили квантование амплитуды.

В силу нашего определения функции ξ , распределение амплитуд в состоянии $|\theta\Psi\rangle$ будет примерно пропорциональным распределению амплитуд в состоянии $A|\Psi\rangle$, причем точность будет неограниченно расти с уменьшением ε до нуля. Для того, чтобы определить нужное для согласованности θ с оператором A значение функции $c(\epsilon)$, подсчитаем вклад каждого вхождения ε^2 в правую часть равенства (3.18) и сравним его с вкладом соответствующей ему буквы ϵ в $|\theta\Psi\rangle$.

Зафиксируем какой-либо переход типов $t_{in} \rightarrow t_{fin}$ и переход состояний $s_{in} \rightarrow s_{fin}$. Будем называть вхождение ε^2 в результат раскрытия скобок в (3.18) соответствующим

⁷Тип вхождения определяется естественным путем после раскрытия скобок, например, для вхождения $\dots - i\epsilon\dots$ типом будет $-i$.

щим этим переходам, если $j = s_{in}$, $i = s_{fin}$, и это вхождение получается умножением вхождения ε типа t_{in} в первый сомножитель правой части (3.18) на вхождение ε во второй сомножитель типа t' , так что $t_{in}t' = t_{fin}$. Каждому такому вхождению ε^2 соответствует ровно один квант амплитуды размера ϵ из квантования амплитуды, определенного выше через функцию ξ , у которого те же самые переходы состояний и типов: этот квант соответствует тому вхождению ϵ , которое взаимно-однозначным отображением ξ переводится в данное вхождение ε^2 (см. Рис. 3.4).

Итак, вхождения ε^2 в (3.18) находятся во взаимно-однозначном соответствии с вхождениями ϵ в (3.19). Сколько квантов амплитуды будет иметь переход состояний вида $|j\rangle \rightarrow |i\rangle$? В каждой скобке из (3.19) таких квантов будет примерно $\{\langle i|A|j\rangle\}/\varepsilon$ штук. А всего скобок примерно $\{\lambda_j\}/\varepsilon$ штук. Поэтому число $n_{i,j}$ будет примерно равно $\{\lambda_j\}\{\langle i|A|j\rangle\}/\varepsilon^2$, и точность будет неограниченно расти при $\varepsilon \rightarrow 0$. Итак, $c(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

Заметим, что если $A = 0$, можно взять $c(\varepsilon) = 0$ и будет годиться любое квантование амплитуды.

Теорема доказана.

Заметим, что если отказаться от условия **Q** и от условия равновесности состояния $|\Psi\rangle$ относительно A , то можно так же определить матричный детерминизм, только надо вводить в матричные элементы сокращающиеся слагаемые $\varepsilon - \varepsilon$; тогда формальные записи амплитуд по всем столбцам A будут содержать одинаковое число членов, и рассуждение будет справедливо, однако интерференция теперь будет происходить не только между потомками разных базисных состояний, как для равновесных $|\Psi\rangle$, а также и между потомками одного и того же состояния.

Заметим также, что квантовое вычисление, в котором применяются только гейты вида $CNOT$ и Адамара обладает тем свойством, что для любого гейта число элементов во всех Z_j будет одинаковым, так что для таких вычислений детерминизм обеспечен при интерференции только между образами разных базисных состояний. Таков, в частности, алгоритм Гровера GSA.

Более того, для перспективных реализаций квантовых гейтов на фотонах (см., например, [31]) состояния, возникающие в результате реализации гейтов, являются связными, так что интерференция в ходе таких квантовых вычислений также обладает отмеченным выше свойством.

3.7 Кванты амплитуды в алгоритме Гровера

Вернемся к алгоритму Гровера GSA, рассмотренному в первой главе с алгебраической стороны, чтобы проследить траектории отдельных квантов амплитуды в соответствующем вычислении.

Пусть вычисление начинается с состояния $WH|\bar{0}\rangle$ и имеет вид

$$G^\tau, \quad G = -WH \cdot I_0 \cdot WH \cdot I_{x_{tar}}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим вспомогательный оператор $D_0 = -WH \cdot WH$, равный, очевидно,

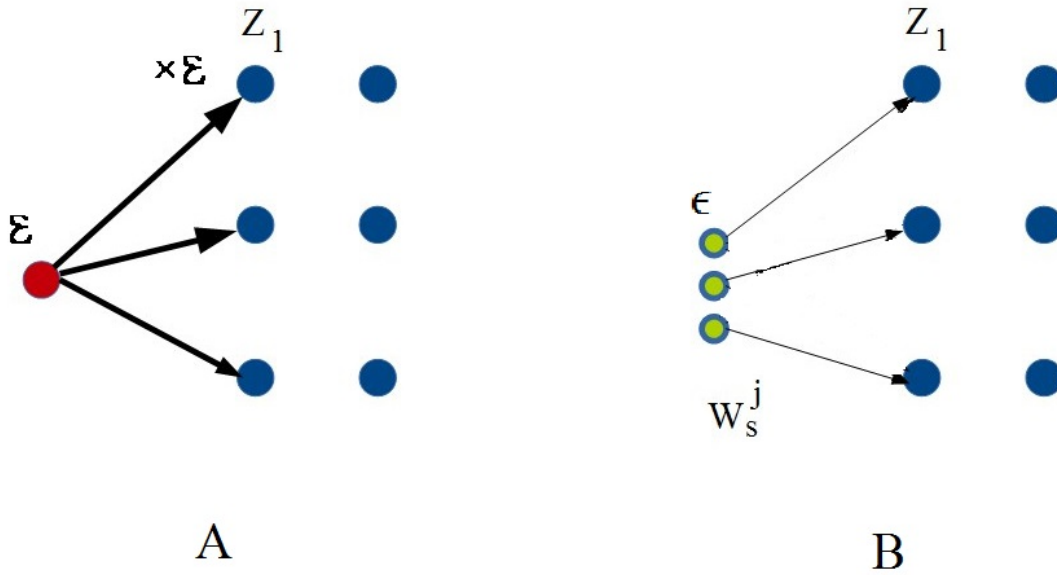


Рис. 3.3: А. Умножение вектора состояния на матрицу. Вклад каждого вхождения ε умножается на ε . В. θ -сдвиг исходного состояния. Размер кванта амплитуды ε имеет порядок ε^2 .

тождественному с обратным знаком. Этот оператор получается из записи G (3.20) удалением двух инверсий: $I_{x_{tar}}$ и $I_{\bar{0}}$. Поскольку $-D_0$ идентичный оператор, его применение не меняет состояния, и потому мы будем следить только за траекториями квантов амплитуды, которые отличаются от траекторий в реализации D_0 .

Что мы видим в G отличного от D_0 ? Отличий два. Первое: сначала меняется знак амплитуды состояния $|x_{tar}\rangle$. Второе: затем меняется знак амплитуды состояния $|\bar{0}\rangle$. Каков будет эффект от таких двух инверсий знаков? Мы рассмотрим только первый оператор G из (3.20), начинающийся непосредственно с $|\bar{0}\rangle$. Поэтому второе изменение знака - у состояния $|\bar{0}\rangle$, не играет практически никакой роли, ибо амплитуда состояния $|\bar{0}\rangle$ после применения оператора $WH I_{x_{tar}}$ мизерна.

Итак, весь эффект в начале вычисления дает изменение знака у $|x_{tar}\rangle$ и знак минус перед оператором G . Изменение знака у амплитуды целевого состояния $|x_{tar}\rangle$ эквивалентно добавлению новых квантов амплитуды со знаком "минус" в амплитуду этого состояния - в добавок к тем квантам, траектории которых реализуют D_0 . Добавить эти кванты надо после применения инверсии $I_{x_{tar}}$. Таким образом, весь эффект от применения первого оператора G в GSA есть добавление квантов амплитуды общей суммы $-2/\sqrt{N}$ после применения $I_{x_{tar}}$.

Но это эквивалентно добавлению квантов состояния $|x_{tar}\rangle$, суммарное значение которых есть $2/\sqrt{N}$ с самого начала. Итак, мы получаем, что первое применение G дает эффект в виде добавления $2/\sqrt{N}$ в начальное состояние, что и является с высокой точностью поворотом на угол $2 \arcsin(1/\sqrt{N})$. Амплитуды всех иных базисных состояний, отличных от $|x_{tar}\rangle$, слегка изменяются в результате перехода малой части квантов в состояние $|x_{tar}\rangle$ для обеспечения приращения амплитуды этого состояния в виде $2\sqrt{N}$; попутно происходит нормировка результата согласно функции $c(\varepsilon)$ (см. 3.6).

Вычисление по GSA можно, таким образом, представить в виде операций над квантами амплитуды. При этом условие \mathbf{Q} не обязано соблюдаться, и промежуточные состояния в вычислении не должны быть равновесными. Траектория отдельных квантов амплитуды показывает, таким образом, механизм ее перераспределения в ходе вычисления: от всех базисных состояний к одному единственному состоянию $|x_{tar}\rangle$.

3.8 Константа масштабирования и ее нахождение

В представлении амплитуд в классическом вычислении они всегда квантуются, то есть имеют вид:

$$\lambda_j = (k_j + il_j)\epsilon, \quad (3.21)$$

где ϵ - малая ненулевая величина - квант амплитуды, а k_j, l_j - натуральные числа. Такое представление амплитуд вытекает из линейности квантовой теории. Оно также требует соответствующего выбора классических базисных состояний, но в силу малости ϵ это не приводит ни к какому пересмотру экспериментально подтвержденной части квантовой теории, а коснется лишь масштабирования квантового компьютера.

Реализация кванта амплитуды в виде соотношений (3.21), помимо их простоты, имеет и другое обоснование - возможность введения микропричинности, что было показано в параграфе 3.6.

Итак, при нашем компьютерном подходе, мы должны считать, что существуют только состояния вида

$$|\Psi\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j |j\rangle, \quad (3.22)$$

где амплитуды имеют вид (3.21). Так что суммирование в (3.22) распространяется на не более чем $1/\epsilon^2$ слагаемых из множества $J = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, $N = 2^n$.

Вся точность предсказаний квантовой теории связана с компьютерными вычислениями, в которых участвуют только числа вида (3.21) с неким минимально допустимым для хранения в памяти компьютера ϵ . При этом компьютерные операции над такими состояниями реализуют любые численные методы, но не выводят за пределы такого дискретного класса состояний. Поэтому введенное нами дискретное ограничение алгоритмической природы не приведет ни к какому пересмотру результатов квантовой механики. Однако оно радикальным образом изменит нашу трактовку квантового компьютера и смысл экспериментов по его созданию, а также и форму распространения квантовой теории на область сложных систем.

Классическое моделирование динамики в операционной системе не отменяет необходимость квантовой части компьютера, так как никакая операционная система не может воспроизвести фактора квантовой нелокальности в режиме реального времени. Этот фактор порождает новые феномены в ограниченных моделях вычислений, что было показано на примере одностороннего бифотонного управления. Все значение таких феноменов пока не понято.

Естественный вопрос: каков размер кванта амплитуды, не имеет точного ответа, точно так же, как и вопрос о пределе точности измерения координаты частицы. С

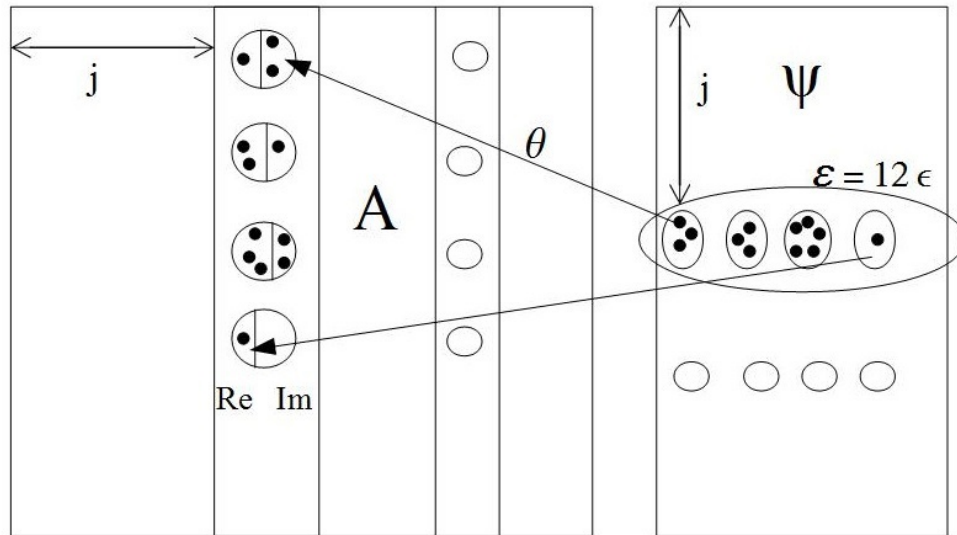


Рис. 3.4: Детерминизм траекторий при умножении вектора состояния $|\Psi\rangle$ на матрицу A . Каждый квант амплитуды переходит в определенный квант амплитуды результирующего состояния, ветвлений нет.

одной стороны, известно, что для очень простых систем, например, для электрона в атоме водорода, $\epsilon \approx 0$, то есть этот квант просто не заметен и никакой роли не играет: волновые функции стационарных состояний определяются очень точно. Здесь играет роль огромное число одинаково "приготовленных" атомов водорода, которые можно подвергать измерению в параллельном режиме, так что собранная статистика будет великолепно соответствовать аналитически найденному решению.

Можно было бы предположить, что квант амплитуды и число частиц в рассматриваемой системе находятся в обратно-пропорциональной зависимости или что-то вроде этого, но это также не будет верным. Набор взаимодействующих друг с другом гармонических осцилляторов может быть сколь угодно большим, однако волновая функция такой системы может быть определена очень точно, так как ее базисные состояния могут быть переопределены с помощью квазичастичного представления, так что полученные квазичастицы не будут взаимодействовать друг с другом, и потому точность определения волновой функции всей системы совпадет с точностью ее определения для одного единственного гармонического осциллятора, то есть может быть сколь угодно велика.

Пусть $\tau \in S_N$ - перестановка базисных векторов основного пространства состояний, соответствующего набору кубитов M . Тогда состояние $\tau|\Psi\rangle$ называется квазичастичным представлением состояния $|\Psi\rangle$. Например, для набора n гармонических осцилляторов их базисное состояние имеет вид (q_1, q_2, \dots, q_n) , а преобразование Фурье над этой последовательностью вида $Q_k = \alpha \sum_j q_j e^{-\beta ikj}$ означает переход к описанию той же системы осцилляторов, но не через их координаты q_j , а через фононы - квазичастицы с новыми координатами Q_k (см. описание канонического преобразования в книге [54]).

Заметим, что переход от конкретных значений обычных координат q_1, q_2, \dots, q_n к

конкретным значений для обобщенных координат Q_1, Q_2, \dots, Q_n есть преобразование вида "один базисный вектор" в "другой базисный вектор" в пространстве квантовых состояний, в котором значение координат есть базисный вектор. То есть преобразование Фурье в данном случае - это не квантовое преобразование Фурье, о котором шла речь выше, а именно перестановка базисных векторов квантового пространства. При кубитовом представлении базисного состояния кубиты, представляющие "новый" базисный вектор, будут иметь совершенно иной смысл по сравнению с кубитами, представляющими "старый" базисный вектор. Поэтому перестановка базисных векторов - очень существенное преобразование; оно способно, например, распутать имеющуюся в старом порядке базисных векторов запутанность. Поэтому преобразование $q_1, q_2, \dots, q_n \rightarrow Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ называют каноническим. В примере с цепочкой осцилляторов оно распутывает квантовое состояние реальных частиц: для квазичастиц - фононов запутанность уже не будет иметь места.

Еще пример: обобщенное GZH - состояние вида $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle)$, в котором запутаны все n кубитов, однако его можно привести к незапутанному состоянию последовательными операциями $CNOT$, являющимися перестановками базисных векторов пространства.

Читателю предлагается рассмотреть другое запутанное состояние $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ и попробовать распутать его с помощью перестановок базисных векторов. Проанализируйте результат и докажите его строго. Какое из трехкубитных состояний: $|GHZ\rangle$ или $|W\rangle$ является в большей степени запутанным и почему?

Абсолютной сложностью $A(\Psi)$ состояния $|\Psi\rangle$ называется минимальная из сложностей всех его квазичастичных представлений (см. определение сложности в конце параграфа ??). Формально:

$$A(\Psi) = \min_{\tau \in S_n} C(\tau|\Psi). \quad (3.23)$$

Абсолютная сложность это число кубитов, необходимых для представления квантового ядра данного состояния. Пространство состояний, в котором живет это ядро, имеет, таким образом, размерность $2^{A(\Psi)}$, которую мы далее будем обозначать через N .

Будем считать, что для состояния (3.22) амплитуды его компонент всегда имеют вид (3.21) для некоторого $\epsilon > 0$. Это эквивалентно тому, что амплитуды будут принимать только четыре значения: $\pm\epsilon$, $\pm i\epsilon$, а состояния из набора J в разложении (3.22) занимают некоторое распределение в классическом пространстве \mathcal{K} конфигураций рассматриваемой системы, так что если мы хотим посчитать "волновую функцию" в обычном понимании этого термина, мы должны просуммировать амплитуды по малым участкам $\delta_k \mathcal{K}$ пространства \mathcal{K} так что четыре вида "квантов амплитуды", складываясь по всем состояниям из $J \cap \delta_k \mathcal{K}$, дадут значение "волновой функции" в центре участка $\delta_k \mathcal{K}$. Для адекватного представления волновой функции размер участков должен быть достаточно малым.

Такое представление волновой функции мы назовем событийным. Здесь вероятность пребывания системы в любом базисном состоянии пропорциональна числу

квантов амплитуды, попавших в малый участок классического пространства с центром в этом состоянии. Если речь идет о пространственной динамике, в событийном представлении нет никакой необходимости. Но если пространственная динамика жестко ограничена, например, структурой сложных молекул, как в биохимии, у событийного представления может появиться смысл.

Если, например, электрон перемещается между двумя потенциальными ямами, его волновая функция, строго говоря, является размазанной по пространству между ними. Однако если мы, в целях экономии вычислительных ресурсов, пренебрежем этим усложнением и будем считать, что электрон просто перемещается от одной точки к другой, его состояние можно будет охарактеризовать одним кубитом $|\psi\rangle = \lambda_0|0\rangle + \lambda_1|1\rangle$, а гамильтониан будет иметь размер 2×2 . Опыт показывает, что такое упрощение ситуации никак не влияет на точность моделирования, так что динамика амплитуд λ_0 и λ_1 адекватно отображает путешествие электрона из одной ямы в другую по множеству промежуточных точек классического пространства состояний.

Мы считаем, что определение пространственного положения любого базисного состояния $j \in J$ требует мало памяти, так как запись числа вообще логарифмична по длине. Так что максимальное значение Q числа N базисных состояний ядра любой квантовой системы является константой, не зависящей от состояния $|\Psi\rangle$. Тогда значение $\epsilon = 1/\sqrt{Q}$ также будет константой, причем безразмерной, так как размерность физической величины будет относиться к базисным состояниям $|j\rangle$ в (3.22).

Представление волновой функции с N базисными состояниями достигается в единственном случае - когда все амплитуды равны по модулю ϵ . Если же базисных состояний меньше Q , это значит, что производится суммирование квантов амплитуды по кускам $\delta_k \mathcal{K}$, и тогда мы имеем соотношение неопределенностей "сложность - точность" вида

$$N \log_2(1/\epsilon) \leq Q, \quad (3.24)$$

где ϵ есть точность представления амплитуд традиционной "волновой функции" для набора N точек в пространстве \mathcal{K} . Так что при значениях $N \ll Q$ точность представления традиционной "волновой функции" будет столь высокой, что ее невозможно будет отличить от аналитически полученного выражения; для простых систем именно это и имеет место.

Конструктивная безразмерная константа Q имеет физическую природу, и потому подлежит экспериментальному поиску. Для этого надо распределить амплитуду по очень большому числу классических состояний какого-то ансамбля, так чтобы наличие кванта амплитуды ϵ приводило бы к грубому отклонению от когерентной динамики, которые можно было бы зафиксировать в эксперименте.

Самый надежный путь - реализация алгоритма Гровера - GSA (см. [11]) для возможно большего числа n кубитов. Мы должны воспроизвести вычисление по этому алгоритму для нахождения корня уравнения

$$f(x) = 1, \quad (3.25)$$

где f - булева функция от n переменных, такая что у этого уравнения есть единственное решение x_{tar} . Назовем критическим значением n такое минимальное значение,

для которого наличие ненулевого зерна амплитуды ϵ существенно исказит динамику текущего вектора состояния по сравнению со стандартной квантовой схемой GSA.

Напомним, что алгоритм Гровера состоит из последовательных применений оператора

$$G = -I_{\tilde{0}}I_{x_{tar}} \quad (3.26)$$

$\tau = [\pi\sqrt{N}/4]$ раз, где $N = 2^n$. На каждом шаге амплитуда состояния $|x_{tar}\rangle$ немного возрастает, а амплитуды всех других состояний немного убывают, так что динамика текущего состояния $|\Psi_s\rangle$ после s шагов дается формулой

$$|\Psi_s\rangle = \cos(2s/\sqrt{N})|\tilde{0}\rangle + \sin(2s/\sqrt{N})|x_{tar}\rangle, \quad (3.27)$$

где $|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle$. Этот характерный вид, когда амплитуда одного единственного состояния превосходит амплитуду всех иных состояний, у которых она одинакова, сохранится при любой перестановке базисных векторов τ . Поэтому ядро состояния квантового компьютера при вычислении по алгоритму Гровера будет иметь размерность $N = 2^n$.

Так как при реализации GSA в разложении текущего состояния $|\Psi_s\rangle$ каждое базисное состояние логических кубитов $|j\rangle_{log}$ дополняется ровно одним базисным состоянием анцилл, то их число $(n+1)$ не играет роли в подсчете, поэтому начиная с первого шага все n кубитов будут составлять единое квантовое ядро, и число n всех кубитов, включая анциллы (их должно быть $n+1$), для которого первый шаг GSA будет давать верный ответ, будет равно $\log_2(Q)$. Как только значение амплитуд $\cos(2s/\sqrt{N})/\sqrt{N}$ прочих состояний станет меньше ϵ , эти амплитуды станут нулями, и состояние с большой точностью совпадет с $|x_{tar}\rangle$.

Из этого следует парадоксальный эффект быстрого получения $|x_{tar}\rangle$ при запуске GSA для $n = [\log_2(Q)]$ логических кубитов: в этом случае только одного применения оператора G вида (3.26) достаточно, чтобы амплитуды всех состояний $|j\rangle$, $j \neq x_{tar}$ стали нулевыми.

Для экспериментального обнаружения такого эффекта надо настолько точно настроить гейты, чтобы достичь максимально возможной размерности ядра квантового Q . Ниже мы обсудим оценки на эту константу.

Рассмотрим два процесса: переход состояний электрона в атоме Rb^{85} и распад нестабильного ядра He^6 . Первый процесс описывается квантовой электродинамикой довольно точно, полное квантовое описание второго пока отсутствует.

Мы будем исходить из критерия точной прорисовки волновой функции, когда каждый шаг его компьютерного описания требует одного нового базисного состояния. Это вытекает из скорости квантового блуждания, при котором фронт волны распространяется с линейной скоростью (в отличие от классического блуждания, при котором скорость пропорциональна квадратному корню из времени). Пусть t - общее время процесса, dt - шаг компьютерного описания этого процесса во времени, тогда число базисных состояний, необходимых для "точной прорисовки" процесса составит $N = t/dt$. Значения t определяется экспериментально, а dt находится из соотношения неопределенностей "энергия - время".

Для рабиевской осцилляции атома рубидия, происходящей с испусканием фотона с длиной волны примерно 1.4 cm мы имеем: $\omega \approx 10^{10} \text{ sek}^{-1}$, $E_{QED} = \hbar\omega \approx 10^{-17}$, $dt \approx \hbar/E_{QED} = 10^{-10}$. Учитывая время рабиевской осцилляции $t \approx 10^{-6} \text{ sek}$, мы получаем $N = t/dt \approx 10^4$. Тогда $Q \geq 10^4 < 2^{14}$ и для хорошего отображения данного процесса на основании квантовой теории достаточно работы GSA на 14 кубитах, что представляется реальным.

Теперь рассмотрим распад ядра изотопа гелия: $He^6 \rightarrow He^5 + n \rightarrow He^4 + 2n$ (в данном грубом приближении учитываем только нуклоны). Характерное значение энергии будет около $10 \text{ Mev} \approx 10^{-5} \text{ erg}$, и соотношение неопределенности "энергия-время" даст $dt \approx 10^{-22} \text{ sec}$. Весь процесс занимает около 1.6 sec , откуда $N = t/dt \approx 10^{22} \approx 2^{73}$, и если квантовую механику можно продолжить до ядерных процессов типа распада изотопа гелия - 6 до стабильного изотопа 4, GSA должен хорошо работать уже на 73 кубитах.

Распад изотопа гелия 6 с точки зрения квантовой механики - весьма сложный процесс. Можно рассмотреть только его последнюю стадию, когда от стабильного ядра гелия 4 отщепляется один нейтрон (см. [55]). Она занимает примерно 10^{-11} sec . Для нее оценки, аналогичные вышеприведенным, дадут примерно 36 кубитов надежной реализации GSA, что уже менее реалистично, однако соответствующее значение $Q \approx 2^{36}$ можно уже верифицировать на экспериментах по GSA. Таким образом, принятие гипотезы о зерне амплитуды напрямую связывает вопрос о применимости квантовой теории к реальным микропроцессам и реализацию GSA. Реализация GSA становится, таким образом, центральным вопросом квантовой теории и теории сложных систем как таковых.

3.9 Зерно амплитуды как причина измерений

Измерение квантового состояния $|\Psi\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j |j\rangle$ есть случайная величина, принимающая значения $|j\rangle$, $j \in J$ с вероятностями $|\lambda_j|^2$. Физически оно начинается с контакта исходной системы с измерителем, то есть унитарного преобразования вида

$$|\Psi\rangle|0\rangle_{meas} \rightarrow \sum_{j \in J} \lambda_j |j\rangle \sum_{i_j \in I_j} \mu_{i_j} |i_j\rangle_{meas}. \quad (3.28)$$

Если число элементов в каждом множестве состояний измерителя I_j очень велико, так что амплитуды всех конкретных состояний измерителя становятся примерно равными зерну ϵ : $\sum_{i_j \in I_j} \mu_{i_j} \approx \epsilon$, то в силу унитарности перехода (3.28) числа элементов множеств I_j становятся с большой точностью пропорциональными вероятностям $|\lambda_j|^2$ получения результата $|j\rangle$ в измерении. Поэтому измерение означает выбор наугад из урновой схемы, дающий вероятности исхода в соответствии с правилом Борна.

Итак, наличие зерна устраняет странный барьер между унитарной динамикой и коллапсом волнового вектора, который является помехой для моделирования динамики, так как использование квантового основного уравнения требует квадратичного роста ресурсов памяти при компьютерном моделировании по сравнению с унитарной

динамикой, так как приходится хранить в памяти матрицу плотности вместо вектора состояния.

В предельном случае, при полном коллапсе на каждом шаге эволюции, мы получим полностью детерминистическое описание динамики в том случае, если есть некоторое превосходство амплитуды одного единственного состояния $|j_{tar}\rangle$ над всеми другими, как в алгоритме Гровера. Базисные состояния $|j\rangle$, при этом, вообще говоря, должны быть нелокальными в силу фундаментальной квантовой нелокальности; ее мы уже обсуждали выше. Такая форма описания динамики совершенно необычна, но именно она, вероятнее всего, окажется адекватной реальным сложным системам, которые являются предметом проекта квантового компьютера.

3.10 Выводы

Мы выяснили, что гипотеза зерна разрешения амплитуды приносит ряд преимуществ в изучении квантовой физики сложных процессов.

Во первых, это дает единое описание эволюции, экономичное с точки зрения компьютерного моделирования, в отличие от традиционных моделей, использующих квантовое основное уравнение.

Во-вторых, это дает точную модель декогерентности, при которой эксперименты по масштабированию квантового компьютера обретают фундаментальный смысл: поиск границы Q размерности гильбертова пространства для квантового ядра любой системы, или, что эквивалентно, для зерна ϵ разрешения амплитуды. Обе константы безразмерны и могут быть найдены в экспериментах при условии достаточно точного тюнинга гейтов.

Приведенные оценки константы Q с помощью реализации алгоритма Гровера говорят о сравнительной простоте описания на квантовом языке электродинамики: для этого достаточно, чтобы GSA работал на примерно 10 логических кубитах. Для описания на квантовом языке ядерной физики требуется уже работа GSA на более чем 30 логических кубитах при таком же числе анцилл.

В третьих, зернистость амплитуды дает возможность построения детерминированных моделей динамики, что открывает возможность более эффективного применения квантовой теории к сложным процессам, в которых краткий миг жизни когерентных состояний неизменно заканчивается полной декогерентностью.

3.11 О перспективах квантового детерминизма

Мы видим принципиальную возможность введения квантового детерминистического параметра, точно определяющего путь эволюции для начального состояния при условии его связности. Знание этого параметра позволило бы, в принципе, предсказать результат наблюдения конечного состояния системы в заданный момент времени.

Однако это "знание" не является практически значимым примерно в той же мере, как и нелокальность не дает возможности передавать информацию быстрее света. Действительно, мы никак не можем получить детерминистический параметр априори, даже если начальное состояние является базисным, классическим. Мы "узнаем" его только когда получим результат измерения конечного состояния через промежуток времени t - это задача квантовой теории простых систем, которые ограничивают область применимости копенгагенской теории. В эту область входят атомы или их ансамбли, даже макроскопических размеров, в которых ограничение гильбертова пространства величиной размерности Q не играет никакой роли. Поэтому в копенгагенской теории этот параметр является вымороченным, лишним.

Однако если значение Q существенно, как в случае сложных систем, и трюк с переходом к квазичастицам (см. выше) не приводит к редукции ядра квантового состояния, фактически мы имеем дело с концентрацией амплитуды на малом числе, в пределе - на одном единственном базисном состоянии, так что переход от одного базисного состояния к другому осуществляется через краткий период квантовой когерентности. Тогда детерминистический параметр становится вполне реальным, так как он определяет динамику процесса в классических терминах. Разумеется, такая динамика ни в коем случае не будет определяться классической физикой.

Итак, для сложных систем, выходящим за пределы копенгагенской теории, само формальное существование такого параметра может представлять ценность, так как это указывает на возможность детерминистического описания сложных систем с высокой точностью. Также это может говорить о истинном источнике квантовой неопределенности - потенциальной неограниченности внешней среды для рассматриваемой системы.

Квантовое основное уравнение, описывающее в рамках копенгагенской теории контакт с окружением, является паллиативным решением. Эта теория не дает определения понятия "контакт с окружением". Например, если окружающая среда создает потенциал, мы можем использовать уравнение Шредингера и никаких линдбладовских операторов не нужно для очень точного описания динамики. В пост-квантовой теории не должно быть матрицы плотности по двум причинам. Во-первых, в этом странном объекте фактически присутствуют два вида вероятностей: классическая, некогерентная, и квантовая - когерентная, что логически некрасиво. Во-вторых, для сложных систем, когда константа Q жестко ограничивает рост размерности пространства состояний, квадратичный расход памяти моделирующего компьютера неприемлем.

Обобщать квантовую теорию на пост-квантовую область сложных систем надо, стартуя с унитарной динамики. Влияние среды должно проявляться в форме ограничения величины амплитуды зерном $\epsilon = 1/\sqrt{Q}$; в этом случае мы достигнем единства описания системы. Если динамика такова, что величина этого параметра пренебрежимо мала, у нас получится унитарная динамика замкнутой системы, в противном случае динамика будет иметь кусочный тип, когда периоды когерентности будут сменяться чем-то вроде связанных состояний.

Эксперименты, в которых выявляется квантовый механизм динамики, требуют изоляции именно объекта изучения от окружения, даже если этот объект имеет протяженные размеры, как для бифотонов. Такая изоляция исключает из сферы при-

менения копенгагенской теории живую материю - наиболее сложный класс систем, в которых детерминизм ярко проявляется через функции молекулы ДНК.

Квантовый детерминистический параметр является хорошим связующим звеном между значимым для нас миром сложных явлений и радикально квантовым микромиром простых объектов. По всей вероятности, неклассическая детерминистическая картина сложных процессов и радикально квантовая форма динамики простых явлений дополняют друг друга, и находятся в своеобразном соотношении неопределенностей. Понимание этой дополнительности так же важно для развития квантового компьютера, как и традиционные соотношения неопределенности в стандартной квантовой теории.

Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2012. — 224 с. — 500 экз. — ISBN 978-5-9221-0819-5.
- [2] R.Feynman, QED: The strange theory of light and matter, Princeton University Press, 1985.
- [3] R.Feynman, D.Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, 1984, Р.Фейнман, Д.Хиббс, Квантовая механика в интегралах по траекториям, Москва, Наука, Физ.-мат. лит.
- [4] Ю. И. Богданова, Д. В. Фастовецас, Б. И. Бантыш, А. Ю. Чернявский, И. А. Семенихин, Н. А. Богданова, К. Г. Катамадзе, Ю. А. Кузнецов, А. А. Кокин, В. Ф. Лукичев, Методы анализа качества элементной базы квантовых информационных технологий, Квантовая электроника, 2018, том 48, N 11, страницы 1016–1022.
- [5] Shor P. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring // Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on — IEEE, 1994. — P. 124–134. — ISBN 0-8186-6580-7 — doi:10.1109/SFCS.1994.365700
- [6] P.Benioff, Quantum Mechanical Models of Turing Machines That Dissipate No Energy Phys. Rev. Lett., Vol. 48, 1982, pp. 1581–1585.
- [7] Richard P. Feynman, Simulating Physics with Computers, International Journal of Theoretical Physics, VoL 21, Nos. 6/7, 1982, pp. 467-488.
- [8] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. Smolin, H. Weinfurter, Elementary gates for quantum computation Phys.Rev. A52 (1995) 3457.
- [9] А. Китаев, А. Шень, М. Вялый, Классические и квантовые вычисления, 1999. 192 с. ISBN 5-900916-35-9.
- [10] L. Fedichkin, M. Yanchenko, K. A. Valiev, Novel coherent quantum bit using spatial quantization levels in semiconductor quantum dot, Quantum Computers and Computing 1, 58 (2000).
- [11] L.Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), May 1996, pages 212-219. Proceedings, Melville, NY, 2006, vol. 810, electronic version: xxx.lanl.gov, quant-ph/0610052.

- [12] Y.Ozhigov, Lower bounds of a quantum search for an extreme point, Proc.Roy.Soc.Lond. A455 (1999) 2165-2172.
- [13] C.H. Bennett, E. Bernstein, G. Brassard and U.V. Vazirani, "Strengths and weaknesses of quantum computing" SIAM J. on Computing, Vol. 26, No. 5, pp. 1510–1523, 1997.
- [14] C. Zalka: Grover's quantum searching algorithm is optimal. Phys. Rev. A 60 (1999) 2746–2751.
- [15] Ozhigov Y.I. Quantum computers speed up classical with probability zero, Chaos, Solitons and Fractals, 1999, 10, 1147-1163.
- [16] C.Zalka, Simulating quantum systems on a quantum computer, Proceedings of The Royal Society A 454(1969):313-322, January 1998.
- [17] S.Wiesner, Simulations of Many-Body Quantum Systems by a Quantum Computer, arXiv:quant-ph/9603028.
- [18] P.W.Shor, Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory, Phys. Rev. A 52, R2493(R), 1995.
- [19] H. Breuer and F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems, Oxford (2002).
- [20] A. V. Kulagin, V. Y. Ladunov, Y. I. Ozhigov, N. A. Skovoroda, and N. B. Victorova "Homogeneous atomic ensembles and single-mode field: review of simulation results Proc. SPIE 11022, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2018, 110222C (15 March 2019); <https://doi.org/10.1117/12.2521763>.
- [21] R. Dicke, Phys. Rev . 93, 99 (1954).
- [22] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE 51 (1): 89–109, (1963). doi:10.1109/PROC.1963.1664
- [23] Michael Thomas Tavis, A Study of an N Molecule Quantized-Radiation-Field Hamiltonian, Dissertation, <https://arxiv.org/abs/1206.0078>.
- [24] P. Kok, K. Nemoto, and W. J. Munro, Properties of multi-partite dark states, e-print 2002 <http://lanl.arxiv.org/abs/quant-ph/0201138>.
- [25] Knill, E., Laflamme, R., Milburn, G. J. (2001). "A scheme for efficient quantum computation with linear optics". Nature. Nature Publishing Group. 409 (6816): 46–52
- [26] Gottesman, D., Chuang, I. L. (1999-11-25). "Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations". Nature. 402 (6760): 390–393
- [27] Bennett, Charles H.; Brassard, Gilles; Crépeau, Claude; Jozsa, Richard; Peres, Asher; Wootters, William K. (1993-03-29). "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels". Physical Review Letters. 70 (13): 1895–1899.

- [28] Popescu, S., Knill-Laflamme-Milburn Quantum Computation with Bosonic Atoms, PRL 99, 130503 (2007).
- [29] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser, Phys. Rev. Lett., 1987, Vol. 58, no. 4, p. 353.
- [30] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate, Phys. Rev. Lett. 75, 4714 (1995).
- [31] Azuma H., Quantum computation with the Jaynes-Cummings model, Prog. Theor. Phys. 126, 369-385 (2011).
- [32] V. Ladunov, Y. Ozhigov, N. Skovoroda , Computer simulation of quantum effects in Tavis-Cummings model and its applications, SPIE Proceedings, vol. 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016; 102242X (2017) <https://doi.org/10.1117/12.2267190>
- [33] Plenio, M., et al., "Dephasing assisted transport: Quantum networks and biomolecules New J. Phys. 10, 113019 (2008).
- [34] Fenna, R. E.; Matthews, B. W. (1975). "Chlorophyll arrangement in a bacteriochlorophyll protein from Chlorobium limicola". Nature 258 (5536): 573–7. Bibcode:1975Natur.258..573F. doi:10.1038/258573a0
- [35] Y.Ozhigov, Dark states of atomic ensembles: properties and preparation, Proc. SPIE 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016, 102242Y (December 30, 2016); doi:10.1117/12.2264516.
- [36] A.V.Tsukanov, Optomechanical systems and quantum computing, Russian Microelectronics, September 2011, 40:333.
- [37] Бор Н., Дискуссии с Эйнштейном о проблемах теории познания в атомной физике // Атомная физика и человеческое познание — М.: ИЛ, 1961. — стр. 60.
- [38] Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. — М.: Наука, 1989. — 400 с. — ISBN 5-02-012452-9.
- [39] V.M.Akulin, Dynamics of Complex Quantum Systems, Theoretical and Mathematical Physics, Spinger, 2006.
- [40] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables" I". Physical Review. 1952, 85: 166–179.
- [41] A.Khrennikov, Vaxjo Interpretation of Wave Function: 2012, Reconsideration of Foundations-6, AIP, 1508, 244-252 (2012), DOI: 10.1063/1.4773136.
- [42] Aspect, Alain; Dalibard, Jean; Roger, Gérard (December 1982). "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers". Physical Review Letters. 49 (25): 1804–1807.
- [43] Jian-Wei Pan; D. Bouwmeester; M. Daniell; H. Weinfurter; A. Zeilinger (2000). "Experimental test of quantum nonlocality in three-photon GHZ entanglement". Nature. 403 (6769): 515–519.

- [44] J. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox"; *Physics*, (1964), 1 (3): 195–200.
- [45] J. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics"; *Reeview of Modern Physics*, (1966), 38, N3, стр. 447-452.
- [46] Aspect, Alain; Dalibard, Jean; Roger, Gérard, (1982), Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time- Varying Analyzers. *Physical Review Letters*. 49 (25): 1804–1807. Bibcode:1982PhRvL..49.1804A. doi:10.1103/PhysRevLett.49.1804.
- [47] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Anton Zeilinger, Going Beyond Bell's Theorem, in: 'Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe', M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht, 69-72 (1989).
- [48] AIP Conference Proceedings, vol. 962, Quantum Theory: Reconsideration of foundations -4, ed. Guillaume Adenier, Andrei Yu. Khrennikov, Pekka Lahti, Vladimir I. Man'ko and Theo M. Nieuwenhuizen, (2007), ISBN: 978-0-7354-0479-3.
- [49] F.Ablayev, C.Moore, C.Pollett, Quantum and Stochastic Branching Programs of Bounded Width, International Colloquium on Automata, Languages, and Programming , ICALP 2002: Automata, Languages and Programming pp 343-354.
- [50] Dovesi, R., Civalleri, B., Roetti, C., Saunders, V. R. and Orlando, R. (2005) Ab Initio Quantum Simulation in Solid State Chemistry, in *Reviews in Computational Chemistry*, Volume 21 (eds K. B. Lipkowitz, R. Larter and T. R. Cundari), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA. doi: 10.1002/0471720895.ch1
- [51] Y.I.Ozhigov, Distributed synthesis of chains with one-way biphotonic control, *Quantum Information and Computation*, vol. 18, 7-8, pp. 0592-0598.
- [52] Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк (1955). «К теории умножения причинных сингулярных функций». *ДАН СССР* 100: 25.
- [53] S. Hameroff; R. Penrose, "Consciousness in the universe: A review of the 'Orch OR' theory". *Physics of Life Reviews*, 2014, 11 (1): 51–53.
- [54] Ф.Маттук, Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел, М., Мир, 1974.
- [55] V. P. Maslov, "Rotation of a Neutron in the Coat of Helium-5 as a Classical Particle for a Relatively Large Value of the Hidden Parameter t_{meas} ", *Math. Notes*, 103:1 (2018), 67–74.
- [56] В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин, Параллельные вычисления, БХВ-Петербург, 2002. — 608 с. ISBN 5-94157-160-7.
- [57] Limits to Parallel Computation: P-Completeness Theory, R. Greenlaw, Н. J. Hoover, W. L. Ruzzo, Oxford University Press, 1995, pp. 336.
- [58] А.С.Холево, Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи, *Пробл. передачи информ.*, 1973, том 9, выпуск 3, страницы 3–11.
- [59] А.А.Марков младший, О непрерывности конструктивных функций, *Успехи мат. наук*, 1954, 9, N 3 (61), стр. 226-229.

- [60] G.S.Tseitin, Algorithmic operators in the constructive metric spaces, Doklady Akademii Nauk USSR (rus), 1959, 128, N 1, pp.49-52.