Квантовый компьютер

Ю.И.Ожигов[1]

[1]Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Физико-технологический институт РАН им. К.А.Валиева, e-mail: ozhigov@cs.msu.su

Глава 1

Введение в квантовую механику

Глава 2

Конечномерные модели КЭД

Глава 3

Квантвоый детерминизм

Глава 4

Диалог специалиста с дилетантом

В заключение иногда помещают "часто задаваемые вопросы и ответы на них". Я решил последовать этой традиции, так как квантовый компьютер - еще далеко не законченный проект; никто не знает, чем он кончится и что даст в виде результата. Поэтому я решил резюмировать вышесказанное в виде неформального и местами юмористического диалога специалиста в этой области (или того, кто таковым себя считает), и дилетанта, диалога, происходящего в присутствии почти всегда безмолвствующих зрителей, которые выражают свои эмоции возгласами (которые мы опускаем), и под наблюдением строгого модератора, который следит лишь за тем, чтобы обсуждение не отвлекалось от темы "Квантовый компьютер" и не превращалось в пустопорожний треп.

4.1 Раунд 1. Околонаучный

Итак, первое слово специалисту.

Специалист: Надеюсь, что после прочтения книги у вас сложилось убеждение в том, что проект квантового компьютера требует финансирования на уровне не меньше $1,5\%$ бюджета России. И если этого не сделать, то нынешнее поколение человечества, возможно, будет последним, не так ли?

Дилетант: Но позвольте, ведь это примерно то, что у нас тратится на науку в целом!

Специалист: Именно так. И все это должно идти только на Квантовый Компьютер. А на науку в целом должно уходить 25 процентов бюджета. И это не шутки: такие вложения гораздо более эффективны, чем все прочие.

Дилетант: Вы, очевидно, шутите. Такого никогда не может быть.

Специалист: Очень даже может. Чернобыльская авария, например, съела годовой бюджет СССР. А в период с 1945 по 50 годы примерно страна вообще с себя последнюю рубашку сняла, чтобы построить атомную бомбу. А Вы говорите про 25 процентов. И если мы не опомнимся, опять будет такая же ситуация...

Модератор: Коллеги, я вынужден напомнить, что мы собрались для обсуждения квантового компьютера, а не экономической политики!

Специалист: Но это же связанные вещи! Эффективное управление природой возможно только на квантовом уровне. Посмотрите на микромир. Там ядерная физика. А биология, микроорганизмы? Мы научились делать их почти что искусственно, но не знаем, как с ними дальше работать! Одна ”Синтия” чего стоит...

Голос из народа: Это тот микроб искусственный, что должен был кушать нефть, а принялся за животных и людей?

Специалист: Тот самый. Мы с нашими, примитивными, по-сути, технологиями научились создавать проблемы, и пытаемся их решать на уровне классической физики, тогда как Природа играет по квантовым законам, и нам ее никогда не обыграть. Нас всюду окружают радиоволны, а они влияют на атомные ядра, их спины, и, значит, на химизм - кто знает, к чему это может привести? Пока мы всерьез не займемся квантовым компьютером, мы будем как неандертальцы: защищаться от хищников палками и камнями. Только хищники теперь наши, рукотворные, созданные нашим неуемным технологическим ”прогрессом”.

Дилетант: Я не очень понял детали, но есть ощущение, что Вы правы. Я верю, что за этим проектом стоит что-то очень серьезное, и я хотел бы разобраться, по-крайней мере качественно, в том, к чему он должен привести. Я понял вот какие вещи. Во-первых, квантовая теория занимает особое место в силу своей универсальности; она объясняет практически все на микроскопическом уровне, и, в виде проекта ”Квантовый компьютер” претендует на то, чтобы вообще объяснить наш мир, не так ли?

Во-вторых, я уяснил, что наш мир фундаментально плюралистичен, в том смысле, что траектория любого объекта может быть любой, а то, что мы видим в реальности есть результат жесточайшего отбора этих динамических сценариев по так называемой амплитуде. И в этом отборе выживает классическая траектория только в том случае, когда элементарное действие при моделировании оказывается существенно больше $\hbar \approx 10^{-27}$ эрг на секунду, верно?

Специалист: Да, Вы верно поняли суть квантовой механики, однако я бы не стал так категорично утверждать о ее универсальности: гравитация и ядерная физика пока не очень-то ей поддаются; химия и биология представляются куда как более близкими приложениями...

Дилетант: У меня свое мнение на этот счет, но сейчас меня интересует другое. Вы все время говорите о ”состоянии”, то есть о ”волновой функции” частицы. И при этом это самое состояние имеет только статистический смысл, его можно узнать только если у нас есть огромная масса одинаково приготовленных частиц, и тогда, измеряя каждую из них так и сяк, мы получим эту самую волновую функцию?

Специалист: Совершенно верно.

Дилетант: Но тогда выходит, что у одной, уникальной частицы вообще не может быть никакой волновой функции? Потому что нет у нее копий, и мы не можем набрать статистику. А как же тогда быть со сложной системой, ведь Вы же сами говорили, что квантовый компьютер есть ее модель?

Специалист: Сложная система, Вы имеете в виду Escherichia Coli - кишечная палочка? Она не уникальна, их очень много и набрать статистику можно. Конечно, если фиксировать состояние такой бактерии не с такой точностью, как электрона в квантовой точке... Квантовый компьютер есть приближенная модель сложной реальной системы, модель, которую можем сделать мы сами, в отличие от живой бактерии. Но эта модель качественно лучше тех "компьютерных моделей живого", которые есть сейчас.

Дилетант: Лучше чем? Тем что в квантовом компьютере есть так называемое дальнодействие? Кстати, я, что-то не понял, почему оно не нарушает теорию относительности? Ведь речь идет о мгновенном действии на расстоянии, действии, скорость которого превышает скорость света!

Специалист: Ничего дальнодействие не нарушает! Информация, задуманная нами, не может путешествовать быстрее света. Но что-то может! Нечто, к чему у нас нет непосредственного доступа, обладает свойством мгновенного перемещения. У меня, увы, нет иного объяснения этого феномена, кроме того, чтобы сослаться на некую "административную систему", управляющую реальностью, которую мы не можем себе полностью подчинить. Но можем зафиксировать ее присутствие. Вообще, физика удивительным образом согласована: нигде нет противоречий.

Дилетант: Давайте рассмотрим постулированную Вами невозможность распространения квантовой теории, ну, скажем, на гравитацию. Вы утверждаете, что эта загадочная сила не поддается пока квантовому описанию, я правильно Вас понял?

Специалист: Совершенно верно. Существуют теории квантовой гравитации, фиксируют кванты гравитационного поля - гравитоны, но полной теории пока нет.

Дилетант: Простите, но ведь можно же представить гравитацию как разновидность электромагнитного поля!

Специалист: И как же?

Дилетант: Очень просто. Электродинамика описывает, как электрический заряд создает электромагнитное поле. Механика описывает, как поле влияет на динамику движения зарядов. Считается, что поле - это 4-мерный вектор. Но допустим, что это два 4-мерных вектора: один со знаком "+", созданный положительными зарядами, а другой - со знаком "-", созданный зарядами отрицательными. И пусть действие поля на заряд при одноименных знаках того и другого чуть-чуть меньше, чем для разноименных.

Голос из народа: Интересно, но слишком мудрено! Я знаю закон Кулона...

Дилетант Закон Кулона выводится из уравнений Максвелла. Так вот, притяжение разноименных зарядов будет чуть-чуть сильнее, чем отталкивание одноименных, в соответствии с нашим предположением. И вот эта очень малая, микроскопическая разница, ее нельзя обнаружить в лабораторных условиях. Но если число зарядов огромно, она проявится в том, что электрически нейтральные тела будут притягиваться друг к другу. Это и есть гравитация.

Голос из народа: А как с релятивистской инвариантностью?

Дилетант: Она не нарушится. Я ничего не меняю в уравнениях Максвелла, для которых она имеет место, я просто развожу влияние поля на заряды по знакам - в зависимости от "происхождения" поля.

Модератор: Мы отклоняемся от темы диалога!

Специалист: Ничего-ничего, я отвечу. Ваша модель, возможно, ничему и не противоречит. Но что она дает нового для гравитации? Что, помимо уже известных фактов (замедление времени, коллапс тяжелых звезд и т.п.) позволит нам открыть Ваш подход? И как он связан с квантовым компьютером? Суть нашего предмета в микроскопике, а Вы уводите нас в область космологии, где роль играют лишь огромные массы!

Дилетант: Ну, я пока не знаю, что можно сделать нового в космологии. Но к квантовым объектам такая модель имеет прямое отношение!

Специалист: Интересно узнать, какое именно?

Дилетант: Вот эта малая разница между притяжением электрона и протона и отталкиванием двух электронов или двух протонов. Конечно, в квантовом компьютинге нет больших масс. Просто в силу того, что кванты работают только при очень малых действиях, а для космических тел они просто гигантские. Но есть другое: малые расстояния. Для очень малых расстояний эта разница может превратиться в нечто ощутимое. Вот Пенроуз, кажется, что-то говорил о микрогравитации как причине коллапса волновой функции. А как Вам нравится превращение нейтрона в потенциальную яму, своего рода ловушку для электрона?

Модератор: Коллеги, ближе к теме, пожалуйста!

Специалист: Нейтрон как ловушка для электрона? Из которой он выбирается за примерно 15 минут в свободном состоянии... Забавно, но что это дает? Если подсчитать глубину этой ловушки, ничего похожего ни на дефект массы, ни на что другое не выйдет.

Дилетант: Может быть и не выйдет. Но модель дает кое-что. Например, для стабильности атомного ядра необходимо присутствие в нем нейтронов.

Специалист: Известный факт, но какое ...

Дилетант: И если электрон, туннелируя из одной "нейтронной" ямы в другую, скрепляет ядро...

Специалист: Ядро гелия ^3He стабильно. Объясните, как один электрон, бегающий между 3 нуклонами, способен их связать?

Дилетант: Расположите протоны в вершинах правильного треугольника, а электрон - в его центре.

Специалист: Ха-ха! Это положение неустойчиво. Попробуйте взять три протона и связать их электроном - в ион H_3^{2+} с двойным положительным зарядом - у Вас ничего не выйдет, потому что эта конструкция нестабильна!

Дилетант: Нестабильна в электродинамике. А на очень малых расстояниях, там где сказывается ограничение размерности Q, то есть решетка возможных положений становится стеснительной...

Модератор: Дилетант, Вы заводите нас в тупик, я отниму у Вас микрофон!

Специалист: Все в порядке, я видал и не такое. Я понимаю интерес коллеги к атомному ядру, модели которого, действительно, строятся по образцу электродинамики. Но то, что он нам предложил есть не более чем размахивание руками. Задача физики - нахождение числа! Пока Вы нам не посчитаете что-то неизвестное экспериментаторам, причем не одно, а много разных величин, с помощью Вашей, с позволения сказать, теории, я не буду ее с Вами обсуждать!

Модератор: Присоединяюсь к мнению специалиста.

Дилетант: Я начинаю чувствовать себя, почти как Галилей на допросе у Беллармино.

Голос из народа: Хорошо, хоть не как Бруно...

Дилетант: Мда, хорошо... Так вот, большинство не всегда бывает право. Что такое ваша ядерная физика? Это набор кулинарных рецептов, не более того! Шанс дать ей хоть какую-то теорию один - продвинуть туда методы электродинамики.

Специалист: Петр Капица как-то съязвил: "послушай теоретика и сделай наоборот". Арбитр в физике - эксперимент. Теорий можно настроить сколько угодно. Вот квантовая теория победила потому, что она дает предсказания всех без исключения экспериментов с точностью проведения самих экспериментов. Надо только а) корректно поставить опыт и б) суметь вычислить по ее правилам что должно получиться. Все!

Модератор: Первый раунд завершен с явным превосходством Специалиста.

Дилетант: Я протестую...

Отключение микрофона. Все идут на кофе-брейк, дискуссия продолжается в кулуарах.

4.2 Раунд 2. Около-биологический

Дилетант: Снимаю шляпу перед квантовой теорией, это действительно вершина физики. Но позвольте спросить: как Вы станете находить Ваше "число" если речь идет о той же Escherichia Coli ? В биологии не имеют значения Ваши физические числа!

Специалист: Я не претендую на освоение биологии, это не моя тема.

Дилетант: Но ведь Вы же сами приводили задачу управления живым как аргумент для развития квантового компьютера, или Вы просто лукавите, имея в виду получение грантов? А я - претендую на освоение биологии! Людей интересуют они сами, их проблемы, их здоровье. Мы никогда не сможем жить внутри вашего атома, мы живем в своем, человеческом мире; атомы нам интересны только постольку, поскольку они затрагивают именно нашу жизнь!

Специалист: Я не лукавлю. Просто я, в отличие от Вас, реалист, и не склонен к демагогии. Да, мы хотим управлять живым. Но путь к этому не близкий. Сначала надо освоить химию. Гейты строим для этого...

Дилетант: Я вижу, как вы строите. Ничего не выходит по фейнмановскому плану. Тут не хватает скорости срабатывания оптических зеркал, там слишком быстро фотон улетает из полости, и везде ваша декогерентность вам видите-ли жить мешает. Коды коррекции вон наизобретали, а толк какой? Работа идет уже 20 лет, и где ваш квантовый компьютер?

Специалист: А Вы считаете, что настоящие открытия пекутся как пирожки - в день по десятку? Это журналисты вас приучили - каждый год несколько открытий... Публика избалована, ей нужны фейерверки раз в неделю. "Квантовое превосходство" им подавай, и побольше! Эта область сейчас как атомная физика в 20 годах прошлого века. Кто из студентов на нее шел тогда: может Курчатов с Харитоном молодые и еще парочка, и все. Студенты ломились на электротехнику, энергомеханику, химию - вот это был тренд тогда. А что такое "физика атомного ядра" - экзотика да и только! А вот когда через 20 лет народ увидел, что стало с Хиросимой - тут все переменилось: все валом повалили на это самое ядро.

Дилетант: Все так, я же Вас не упрекаю ни в чем. Знаю, что Вы работаете, просто я вижу со стороны застой, вы находитесь в плену старых подходов. Мне кажется, что в Вашем квантовом компьютере есть нечто гораздо большее сегодняшней прибористики. Я даже считаю, что это и есть путь в биологию, который позволит нам управлять ей, просто надо немного шире посмотреть на эту самую волновую функцию или вектор состояния. Возьмем тот же коллапс - для физиков это просто случайная величина, а Пенроуз с Хамероффом говорят о нем как об "оркестрованном коллапсе" и даже о "акте самосознания"...

Специалист: С проблемой самосознания Вам лучше обратиться к Пенроузу с Хамероффом, я оперирую научными терминами. Живая клетка - это условно твердое вещество (ДНК) в жидкости (цитоплазма). Здесь когерентные состояния существуют от силы микросекунды, что не дает возможности применить квантовые методы. Для гейтов нужно а) твердое тело, б) низкие температуры (хотя бы жидкий азот, лучше гелий), жидкости при комнатной температуре вообще не подходят. Был в конце 90-х проект ЯМР жидкостного "компьютера", но дальше одного кубита дело не пошло. Жидкости вообще неудобный объект для квантовых методов, кроме гелия, но там нужны низкие температуры, при которых жизнь исключена. Вот с этим связан мой скепсис относительно штурма биологической сферы прямо сейчас.

Дилетант: Я его не разделяю. Вот есть ансамблевый подход, когда тысяча атомов рассматривается как один - об этом я как раз прочел в книге. Если оперировать не с отдельным атомом, где действительно нужны и низкие температуры и жесткая локация, а большими группами, где когерентность может многократно усиливаться, кажется, в KLM- компьютере как раз используется это.

Модератор: Коллеги, вы вошли в клинч, и напоминаете персонажи из басни "Лебедь, рак и щука", постарайтесь найти общий язык.

Дилетант: Хорошо, я буду использовать понятные коллеге термины. Вы согласны, что настоящие законы физики должны быть общими и для любимой Вами прибористики, и для живого? Если Вы не согласны, то Вы - идеалист и вообще сторонник поповщины!

Модератор: Желтая карточка! Я прошу воздержаться от личных выпадов!

Специалист: Все в порядке, меня так не пробьешь. Разумеется, я согласен. Просто я, в отличие от Вас, не строю воздушных замков, а занимаюсь делом.

Дилетант: Вот и я по делу. Как, по-вашему, должны выглядеть эти законы? Квантовая механика в них должна участвовать, или ее вообще надо оставить в стороне и заниматься накоплением Protein Data Bank и прочими базами данных по белкам, которые уже скоро не будут в хранилища помещаться? Посмотрим на живое с квантовых позиций. В нем порядок или хаос?

Специалист: Порядок, разумеется...

Дилетант: Порядок, и такой, который вашей прибористике не снился! А как его достичь? При расширении системы энтропия будет неизбежно расти - во всех искусственных системах это подтверждается, и на этом стоит термодинамика. Единственный фактор, работающий на повышение порядка при усложнении системы - квантовая запутанность! Это в книге подробно разобрано! Живое вообще нелокально по своей природе, в отличие от отдельного атома, над которым Вы производите эксперименты.

Специалист: Ха-ха, Вы путаете общество! Квантовая энтропия - это не мера беспорядка в обычном смысле слова, это более сложное понятие...

Дилетант: Знаю-знаю. Квантовая энтропия, равная нулю - это не порядок в классическом смысле, это порядок в квантом смысле, то есть когда все описывается единой пси-функцией, а не ее эрзацами вроде матрицы плотности. Но это и подтверждает мой тезис о том, что для продвижения в биологию язык квантовой теории должен быть изменен.

Специалист: Извините, но язык однозначно соответствует кругу результатов и его нельзя изменить просто так, если только будут новые задачи...

Дилетант: Именно это и происходит с квантовым компьютером. В копенгагенской теории, которую Вы возвели в абсолют, нет никакого описания декогерентности, то есть самого главного препятствия в ваших экспериментах!

Специалист: И что Вы предлагаете конкретно?

Дилетант: Вот зерно амплитуды может дать такое описание, универсальное.

Специалист: И что с того "описания"?

Дилетант: Ну, например, это позволяет избавиться от матрицы плотности, и оперировать только вектором состояния, причем по длине ограниченным! Матрица плотности - чтобы ее хранить надо в квадрат возводить размерность, то есть если у нас, например, миллиард компонент в векторе состояния, и это суперкомпьютер потянет, то матрица плотности - это будет уже миллиард миллиардов, то есть квинтиллион - это уже никакие суперкомпьютеры не поднимут! Вот он - эффект!

Специалист: Вы умолчали о том, что надо выбирать какое-то одно состояние из миллиарда, входящих в матрицу плотности, это в Вашем методе подразумевается.

Дилетант: Да, Вы правы. Но это как раз то, что происходит в реальности. Прыжок от одного базисного состояния к другому, через краткий миг когерентности. И в этот миг надо уложить все управление.

Специалист: Ну и где же Ваше управление? Вы опять размахиваете руками.

Дилетант: Надо считать, моделировать...

Модератор: Мы опять зациклились.

Дилетант: Что я могу сделать, кроме, как говорит оппонент, "размахивания руками"? Вся теория есть такое размахивание.

Специалист: Извините, не сравнивайтесь с квантовой теорией; она предсказывает реальные эксперименты, в отличие от Ваших фантазий...

Дилетант: Если бы на компьютерное моделирование выделялось бы финансирование такое же, как на Ваши эксперименты...

Специалист: У нас приборы.

Дилетант: Сколько стоит операционная система, установленная на Вашем ноутбуке, какова ее доля в его стоимости? А для квантового компьютера это надо умножить...

Модератор: Я вижу, дискуссия фактически закончена и я подвожу итог 2 раунда. Ничья.

Специалист: Вот он, уровень журналистики.

Дилетант: Это подсуживание! Я победил!

Зрители: Наконец то они пришли к согласию...

Все идут на ланч, дилетант что-то объясняет зрителям, собравшимся вокруг него, специалист перекидывается с модератором несколькими короткими репликами.

4.3 Раунд третий, решающий, посвященный физике

Модератор: Этот раунд - последний, и я призываю обе стороны сосредоточиться на нашей главной теме - квантовом компьютере

Специалист: Я всегда об этом помню. Этот проект требует высочайшего профессионализма, так как он связан с постановкой экспериментов, требующих особой точности и владения многими разделами именно физики; заниматься им на уровне общих рассуждений означает потерю времени. Квантовым компьютером должны заниматься мы, физики.

Дилетант: Вы, физики, занимаетесь им уже третий десяток лет. И не только им. Есть еще управляемый термояд, твердый водород и прочие фантазии, которые сводятся к ...

Модератор: Не переходите на личности, ближе к делу!

Дилетант: Я как раз по делу. Ваша любимая физика выдохлась. За последние 50 лет что сделано в области фундаментальных знаний? Математический аппарат, который вы используете, не годится для новых задач и для квантового компьютера. Вы застряли в "античном мире" первой половины 20 века и не хотите видеть его ограниченности!

Специалист: (в сторону: Такую чушь даже журналисты редко несут) Позвольте Вас просветить. Вы слышали что-нибудь о бозоне Хиггса? А вот тот ноутбук, на котором Вы строчите Ваши писания, Вы вообще понимаете как он сделан? Что это и есть плоды квантовой физики, которую Вы сейчас так обругали?!

Дилетант: Не валите все в одну кучу. Я не хуже Вас знаю роль квантовой теории. Но все значимое, ноутбук, например, было фактически придумано, на концептуальном уровне, 50 лет назад, или больше. Что сделано в более поздний период? Я знаю только одно: проект, о котором мы сейчас говорим. И этот проект завершается нахождением как раз той границы, за которой кончается любимая Вами фундаментальная физика. Потому что Природа не слушается гильбертологии, на которую Вы молитесь, и традиционный математический анализ не адекватен сложным процессам, таким как квантовое вычисление.

Специалист: Кроме математики, в физике есть еще более важное: интуиция, впрочем Вам этого не понять.

Дилетант: Физическая интуиция есть иллюзия, впрочем, очень распространенная. Она полностью основана на математическом аппарате, и история физики 20 века - красноречивое свидетельство тому.

Специалист: Хватит болтать! Что Вы конкретно предлагаете?

Дилетант: Квантовый компьютер нужен для управления химией, и в перспективе - биологией. Это требует универсализма, что исключает замыкание проекта в рамках физики. Я не люблю слово "междисциплинарность", оно вводит в заблуждение. Здесь должны быть очень строгие критерии, но именно универсальные, а не узко - физические.

Специалист: Например?

Дилетант: Например, отказ от равноправия базисов в гильбертовом пространстве. Попробуйте описать бактерию в импульсно-энергетическом базисе.

Специалист: Никто этого делать не будет. Гейты - вот там базисы можно выбирать в зависимости от удобства, бактерия здесь не при чем.

Дилетант: Создание гейтов - важнейшая работа, но надо видеть цель. Эти гейты должны работать именно в бактерии, иначе зачем нужен квантовый компьютер? Даже не просто в бактерии, в нас самих! Мы видим природу только через призму нашей собственной биологии. Мы не можем прикоснуться к далеким галактикам или залезть внутрь атома. Но вся физика, в том числе и ядерная - работает по-настоящему именно в биологии. Возьмите сверхтонкое взаимодействие электронных и ядерных спинов. На нем основана магниторецепция насекомых и птиц. А радиоактивность - важнейший мутагенный фактор, основа эволюции. Физика, по большому счету, есть часть биологии. И потому фантазиям есть предел, и мы к нему уже подошли и в него уперлись. Отсюда и застой.

Специалист: Я отчасти согласен с Вами, но универсализм должен учитывать имеющиеся достижения. Вот как все-таки преодолеть декогерентность? Любимая Вами математика с кодами коррекции работает только когда hardware поднят до высокого уровня, до которого мы не можем пока подняться. Вы упираете на застой, но где выход?

Дилетант Я уверен, что Вы недооцениваете роль теории.

Специалист А именно?

Дилетант Вот у Фейнмана в его книге "КЭД. Странная теория света и вещества"...

Специалист ... которая для домохозяек?

Дилетант Домохозяйка часто обладает большим здравым смыслом, нежели профессор. Так вот, там он все обосновывает с помощью принципа интерференции, даже то, что фотон движется по прямой и со скоростью света. Я только не понял одного, почему он постулирует, что амплитуда движения по световому конусу у фотона бесконечная? Это ведь не следует ниоткуда.

Специалист Это следует из экспериментов.

Дилетант Ну да, конечно. Но хорошо бы это подкрепить и теоретическими доводами.

Специалист Вряд ли у Вас это выйдет.

Дилетант Ну вот смотрите. Вот ядро Фейнмана для свободной частицы $e^{ix^2/t}$...

Специалист Вы там массу забыли, и постоянную Планка ...

Дилетант Да Бог с ней... Представьте себе, что Вы рисуете график этой функции. Ну ее вещественной части. Осцилляции будут все чаще и чаще по мере роста x, верно?

Специалист Конечно.

Дилетант И наступит момент, когда Вы не сможете их нарисовать на доске, потому что период будет меньше размера Вашего мела...

Специалист Я использую фломастеры.

Дилетант Да хоть иглой по стеклу, все равно есть конечная разрешимость рисунка. Так вот, частота осцилляций - это как раз и есть скорость квантовой частицы, ее экземпляра, попавшего в данную точку за данное время. То есть, если мы ограничим частоту - зерном разрешения пространства - мы автоматически ограничим скорость! Вот это и есть скорость света.

Специалист Выглядит неплохо.

Дилетант: Вот что нам дает квантовая физика: IT технологии. У нас есть компьютеры и мы можем многое моделировать. Не просто считать, а именно моделировать динамику. Двигаясь по этому пути, можно не просто имитировать работу гейтов в режиме реального времени, можно встраивать в суперкомпьютеры отдельные квантовые устройства, например, генераторы фотонных ЭПР- пар, и демонстрировать квантовое превосходство.

Специалист: Пока это не слишком серьезное превосходство. Нужны оптические полости, а это дорогое оборудование. Причем удержать фотон там удается всего лишь на несколько десятков рабиевских осцилляций, да и скорость срабатывания зеркал очень плохая.

Дилетант: Да, но, вероятно, можно обойтись и без полостей. Вот, например, темные состояния в них не нуждаются.

Специалист: Не нуждаются, если их кто-то уже сделал. А попробуйте сделать их без полостей, тем более со многими атомами, да еще многоуровневыми.

Энтузиаст из народа: Мы уже все поняли, надо развивать квантовую операционную систему и наступит светлое будущее! Только один вопрос: как с финансированием?

Специалист: Мы вернулись к моему предложению о 1,5 % бюджета страны...

Народ, возбужден, перебивает: Да-да, это именно то, что надо! Специалист победил!

Общее возбуждение, Дилетант что-то пытается отвечать, его не слушают...

Модератор: Итак, я подвожу итог дискуссии: победа за явным преимуществом присуждается специалисту. Победила компетентность и высокий профессионализм.

Народ расходится, возбужденно обсуждая принципы распределения финансов, обещанных Специалистом.

В фойе

Человек из народа, Профан: слушай, я не понимаю, как вообще эти опыты можно проверить. Я слышал, что оборудование очень дорогое и оно есть у единиц. Вдруг они там что-то химичат...

Человек из народа, Знаток: да, это может быть. Но основные вещи проверены надежно, интерференция вот. Уравнение Шредингера. Я говорил с разными людьми насчет нелокальности, независимыми, кто сам делает эксперименты. И они все одно и то же говорят: есть это явление, есть!

Профан: я не очень разбираюсь в сложной алгебре, и потому боюсь подвоха. А ну как там есть момент подтасовки экспериментов? Что-то такое остается, непривычно слишком. Тут только узкие специалисты могут разобраться, а как быть мне. Если я Фома неверующий?

Знаток: я вот что думаю. Вот Шор с Гровером алгоритмы придумали, перебор ускоряют радикально. Неизвестный код открывает квантовый компьютер, причем так быстро, что никто подделать не сможет быстроту этой квантовой машины, то есть в принципе не сможет. И, значит, это - критерий. Я тоже мало понимаю в их экспериментах, я больше люблю теорию. Но придумать код, загадать из 30 цифр -

каждый может ведь. Вот я загадал 2 числа по 30 знаков, перемножил их и результат даю этому специалисту. Пусть расколет на множители! Тогда я поверю, что у него есть квантовый компьютер!

Профан: а ведь точно. Вот это - критерий! Правильно. Но ведь для этого гейты должны быть у них. Работать CNOT должен, Тоффоли там и тому подобное.

Знаток: вот с гейтами туго. Это работа скучная, а от них требуют "квантового превосходства" и немедленно. Гейтами надо заниматься, а не ерундой! Вот в книге написано, что ячейка срабатывает медленно. Но ведь это как раз технически решаемая проблема! И решат ее в обозримом будущем, так же, как решили задачу минимазации микросхем, и уже до десятка нанометров доходят по размеру транзистора. Гейты будут, я уверен. И мы доберемся до настоящего барьера, до констранты Q. А там...

Профан: Все эти гейты. Похоже на микроэлектронику, транзистор. Там ведь одна операция, простенькая такая. А вся сложность - в программировании. Я вот программист. Человек эту сложность создает, и в гейтовом компьютере тоже самое будет. Пусть он и квантовый. Опять мы получаем железку! А я вот искусственным интеллектом заинтересовался.

Знаток: Да, приятель, я вот что думаю. В живой клетке, как Шредингер писал, "твердое тело в жидкости", ну то есть ДНК в цитоплазме. Вот куда смотреть надо. Это тебе не микроэлектроника. Вот тут может быть и интеллект этот, искусственный. Опасен он, правда. Получиться может что-то типа этой самой "Синтии", если не хуже.

Профан: Интересно это. Подумаю дома, на досуге. Я теперь вообще дома работаю.

Знаток: Я тоже. Так что, до встречи на просторах интернета!

Профан: До связи! Надеюсь, что и лично пообщаемся в будущем!

Занавес.

Заключение для тех, кто дочитал до конца

Читатель, одолевший все вышенаписанное; это заключение - для тебя! Попробуем взглянуть на квантовый компьютер с высоты птичьего полета, отвлекаясь от множества деталей.

Итак, квантовый компьютер - это, прежде всего, именно компьютер. У него есть физическая часть - hardware и операционная система, а также особая, вычислительная идеология, которая не совпадает ни с физикой, ни с математикой; это идеология Computer Science. Природа этой идеологии - универсальна, она не привязана ни к конкретным физическим объектам, ни к математическим абстракциям; эти вещи играют здесь лишь вспомогательную роль. Компьютер суть продолжение нашего ума и наших рук. Его не надо воспринимать как искусственный "разум" - это исключительно наша прерогатива. Компьютер необходим нам для прогресса, для адаптации к новым условиям, для нашего выживания, он должен использоваться как рабочий инструмент, но не как оракул; оракулом для него являемся мы сами.

Идеология компьютера - продолжение математики, которая, в свою очередь, является областью физики. Теория алгоритмов, раздел традиционной математики, из которого выросла наука о вычислениях и идеология компьютеров, обладает той же красотой и выразительностью, что и алгебра, математический анализ, теория чисел или геометрия. Но вычисления представляют природу по-другому: более реалистично. Ряд сменяющих друг друга кадров видеофильма есть компьютерное вычисление по определенному алгоритму. Если этот алгоритм верен, виртуальная реальность видеофильма будет неотличима от настоящей реальности. Реалистичность динамической картины есть критерий нашего познания природы явлений.

В рамках представлений классической физики человек научился воспроизводить сценарии не сложных процессов, решая дифференциальные уравнения, что обеспечивало прогресс вплоть до конца 20 века. Такие сценарии опирались на нахождение очень точных значений физических величин, сначала экспериментальным путем, а затем и с помощью квантовой физики; таких как энергия возбуждения атомов, время перехода электрона, или его магнитный момент. Это определило прогресс технологий, которые мы используем в настоящее время.

Но вызов современности заключается в управлении биологией, и здесь возникла необходимость в квантовом компьютере. Этот объект лежит в вотчине физиков, и то, что мы сейчас имеем, сделано на основе квантовой физики, по тем шаблонам, по котором создавалась микроэлектроника: это квантовые гейты Фейнмана, их массивы, и представления о квантовом вычислении. Эксперименты в этой области выявили удивительные, контр-интуитивные феномены, такие как дальнодействие. Мы научились использовать созданную в 20 веке квантовую физику для защиты информации. Но квантовый компьютер выходит за пределы физики как таковой. Его идеология, идеология вычислений, вносит коррективы в квантовую теорию на уровне математического аппарата, в котором теперь не должно быть традиционных бесконечностей, как в аналитике.

Это ограничение имеет фундаментальную природу. Еще в середине 20 века была установлена логическая необходимость перенормировок - изменения значений зарядов и масс элементарных частиц в зависимости от зерна разрешения. Для создания реалистичной картины сложных процессов необходим не столько математический анализ недавнего прошлого физики, сколько конструктивный анализ Маркова-младшего (см. Приложение), в котором актуальны лишь приближения любых величин, а не их точные значения. Это и есть идеология Computer Science, которая только и может являться основой квантовой операционной системы.

Создание квантовой операционной системы есть задача ближайшего будущего. Она требует весьма решительного пересмотра копенгагенских воззрений на квантовую физику, в частности, ограничения размерности пространства состояний и отказа от алгебраической универсальности представлений векторов состояний для сложных систем. Это урезание гильбертовых пространств необходимо для построения реальной картины сложных процессов и управления ими, так как традиционный путь квантовых гейтов не способен дать работающего квантового компьютера. Задача этого старого, фейнмановского интерфейса - определить границы копенгагенского формализма, доведя до предела сложности когерентные состояния кубитов. Это - промежуточный, но необходимый и важный этап работы над квантовым компьютером, на котором сейчас сосредоточены усилия экспериментаторов в этой области.

Но основная часть работы над проектом квантового компьютера связана с совершенствованием его математического обеспечения, квантовой операционной системы, которая должна быть размещена на классическом суперкомпьютере или подобном высокопроизводительном устройстве. Физическая часть квантового компьютера, технология которой еще не определена, будет промежуточным звеном между операционной системой и реальным явлением. Это звено представляет собой новизну квантового компьютера, который, таким образом, сможет обладать фундаментальным, квантовым, превосходством над обычным суперкомпьютером, реализуя такой феномен, как мгновенное дальнодействие.

Для сложных систем должно измениться и понятие вектора состояния: его алгебраическая природа и статистический смысл. В простых случаях, хорошо исследованных физикой 20 века, нет никаких проблем с набором статистики: атомов водорода огромное число. С бактериями это уже не так: каждая обладает индивидуальностью. Переход от физических представлений к биологии возможен только в рамках Computer Science; это выходит за рамки книги. Однако важный аспект такого перехода - старый вопрос о детерминизме, и он имеет положительное решение для некоторого класса процессов, что представляет еще один косвенный довод в пользу реалистичности всего проекта.

Задача трудна, но ставки чрезвычайно высоки - это управление жизнью. Залогом нашего успеха является триумф квантовой механики с ее удивительно точным совпадением со всеми известными экспериментами. Квантовый компьютер - новая ступень развития этой великой теории, которая приведет нас к объединению значительной части естествознания, той, что пока лишь формально охватывается электродинамикой и связана с химией и биологией.

Автор надеется, что эта книга дала представление о масштабе и ценности проекта "Квантовый компьютер" и, быть может, поддержала кого-то из читателей в намерении самому принять в нем участие.

Благодарности

Работа над рядом результатов, приведенных в книге, поддержана фондом РФФИ, грант а-18-01-00695.

Автор признателен Надежде Викторовой за обсуждение и ряд ценных замечаний.

Приложение A

Приложение

A.1 Нижняя массовая оценка квантовой сложности

Если говорить кратко, квантовое ускорение вычислений состоит вот в чем. Допустим, мы имеем некий абстрактный квантовый компьютер, в котором реализуется под нашим контролем над гамильтонианом H эволюция $exp(-\frac{i}{h}Ht)$. Можем ли мы с помощью такого устройства предсказать будущее произвольной классической системы? И если да, то насколько быстро? К этому вопросу, по-существу, сводится важнейшая проблема верификации того факта, что кто-либо построил именно квантовый компьютер, а не подделал его работу с помощью спрятанного в подвале суперкомпьтера.

Именно это называется квантовым ускорением классического вычисления. Мы покажем, что если понимать под классической системой конкретную функцию f : $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ из конфигурационного пространство в себя (закон классической эволюции), то ответ на этот вопрос будет зависеть от того, на каком промежутке времени t мы рассматриваем предсказание. Если не накладывать на t никакого ограничения, то квантовое время будет иметь порядок не меньше квадратного корня из классического, то есть квантовое ускорение для большинства классических задач не превзойдет гроверовского - для перебора.

Если же потребовать, чтобы время t было достаточно малым (по сравнению с числом всех возможных конфигураций компьютера), у нас получится совсем удивительный факт: квантовый компьютер потратит на моделирование такое же время, какое занимает сама классическая эволюция (см. [15]).

Квантовый Ахиллес может не догнать классическую черепаху!

Мы покажем, как устанавливается нижняя граница в квадратный корень из классического времени для квантовой сложности нахождения результата итераций классического оракула. Заметим, что такие результаты показывают фундаментальные пределы скорости "квантового Ахиллеса"; их невозможно преодолеть никаким совершенствованием его структуры.

Итак, классическая эволюция представляется в виде итерации некоторой функции f, так что она имеет вид

$$x_0 \longrightarrow f(x_0) \longrightarrow f(f(x_0)) \longrightarrow \ldots \longrightarrow f^k(x_0) \longrightarrow \ldots \longrightarrow f^T(x_0),$$

где через $f^k(x_0)$ обозначена k- кратная итерация f. Значение x_0 не играет в данном случае никакой роли, так что мы пишем просто f^k.

Квантовый компьютер, наш Ахиллес, имеет в своем распоряжении функцию f, и может ее использовать как квантовый оракул $Qu_f : |x, y\rangle \longrightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle$. Все слова f^k принадлежат базисным состояниям квантового гильбертова пространства, так что любое из этих слов можно подставить вместо x или y. Итак, мы можем считать, что f^k принадлежат базисным состояниям нашего компьютера. Тогда, после надлежащей группировки нескольких последовательных операций в вычислении, мы можем считать, что каждое такое состояние e вызывает оракул f на некотором слове $q(e)$ из того же набора (группировка необходима, чтобы в каждой группе было ровно одно вопросное состояние). Мы можем группировать элементарные операции, как угодно; нам нужна только унитарность всех квантовых переходов, использующаяся в дальнейших неравенствах. Тогда вероятность того, что квантовое состояние

$$|\Psi\rangle = \sum_j \lambda_j |j\rangle$$

нашего Ахиллеса вызовет оракул f на слове a, будет считаться по формуле

$$\delta_a(\Psi) = \sum_{j:\ q(j)=a} |\lambda_j|^2,$$

вытекающей из правила Борна. Положим $d_a(\Psi) = \sqrt{\delta_a(\Psi)}$.

Вся скорость Ахиллеса - в этом параллелизме! Он может догнать черепаху - классическое вычисление - лишь за счет того, что спрашивает оракул сразу на всех словах, а не только на одном, как она. Но посмотрим, что ему удастся сделать?

Как определить разницу между двумя стратегиями классической черепахи: функциями f и g, которые определяют классическую динамику? Самое естественное - обобщить определение $d_a(\Psi)$, и определить расстояние между стратегиями черепахи как

$$d_\Psi(f, g) = [\sum_{a:\ f(a)\neq g(a)} \delta_a(\Psi)]^{1/2}.$$

Из этого определения сразу вытекает, что

$$\|Qu_f(\Psi) - Qu_g(\Psi)\| \leq 2d_\Psi(f, g). \tag{A.1}$$

В этой оценке - слабая сторона Ахиллеса. Оператор вопроса к оракулу Qu_f - унитарен, и это связывает квантовую скорость. Поскольку мы анализируем возможности квантового компьютера по отношению ко всем классическим, наша черепаха может применить, так сказать, обманный ход. Что будет, если изменить значение f только на одном слове? Понятно, что это, в большинстве случаев, изменит и значение конечного состояния f^T. Но сможет ли наш Ахиллес уловить подмену? Если его квантовые состояния будут мало отличаться при работе с этими двумя оракулами, он не сможет их различить при измерении, и будет обманут!

Рассмотрим два пути Ахиллеса: с оракулом f и с оракулом g соответственно:

$$\begin{array}{rl} & \Psi_0 \longrightarrow \Psi_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Psi_t, \\ \Psi'_0 = & \Psi_0 \longrightarrow \Psi'_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Psi'_t, \end{array} \tag{A.2}$$

Пусть f действуют всюду одинаково, кроме одного слова a, на котором $f(a) \neq g(a)$. Из неравенства (A.1) простой индукцией по t непосредственно устанавливается, что

$$\|\Psi_t - \Psi'_t\| \leq 2\sum_{i=0}^{t-1} d_a(\Psi_i). \tag{A.3}$$

Теперь нам надо выбрать a так, чтобы доставить Ахиллесу максимум неудобств. Определим матрицу

$$a_{ij} = \delta_{f^j}(\Psi_i),\ i = 1, 2, \ldots, t;\ j = 1, 2, \ldots, T.$$

Здесь t - время Ахиллеса, а T- время черепахи; T/t - коэффициент квантового ускорения. Как связаны эти времена? Максимальное неудобство для нашего Ахиллеса будет доставлено вот таким выбором $a = f^\tau$, где τ выбрано так, что $\sum\limits_{i=1}^{t} \leq t/T$. Это возможно потому, что сумма матричных элементов по любой строке равняется 1 - это полная вероятность; значит, сумма всех вообще элементов будет не больше t. Теперь мы имеем

$$\|\Psi_t - \Psi'_t\| \leq 2\sum_i \sqrt{a_{i\tau}} \leq 2\sqrt{t\sum_i a_{i\tau}} \leq 2t/\sqrt{T}.$$

Второй переход здесь вытекает из неравенства между нормами в пространствах l_1 и l_2, доказательство которого мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Мы видим, что если $t = o(\sqrt{T})$, то Ахиллес проиграл, потому что он не сможет отличить положение классической черепахи f^T от иных. То есть невозможно получить более чем квадратичное квантовое ускорение для большинства классических алгоритмов.

Есть и нижние границы квантовой сложности иного типа. Например, устанавливающие, что квантовый компьютер не может решить переборную задачу существенно быстрее, чем по алгоритму Гровера (см. [13], [14]), а также, что любой квантовый алгоритм, более быстрый, чем гроверовский, должен почти для всех переборных задач давать ошибочный ответ (см. [12]).

Более детальное рассмотрение квантового вычисления [15] показывают, что Ахиллес в большинстве случаев, вообще не способен догнать черепаху классического компьютера. Таким образом, квантовое ускорение классических вычислений является редким феноменом. Оно имеет место для алгоритмов типа перебора, тех самых, которые допускают ускорение с помощью распараллеливания (см. [56]). Задача типа итераций, рассмотренная нами, относится к типу GMSP (см. [57]) и в общем случае не допускает такого типа ускорения; для нее квантовый компьютер оказывается, в подавляющем большинстве случаев, не лучше классического.

Это - косвенное свидетельство того, что квантовый и классический параллелизм близки друг другу. Что подкрепляет уверенность в том, что и попытки найти какие-либо формы детерминистического описания квантовых эволюций, предпринимавшиеся нами в третьей главе, не являются только лишь математическими упражнениями.

A.2 Квантовый гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором (г.о.) называется шарик массой m, подвешенный на пружинке жесткости k.

1. Написать оператор энергии H г.о. используя закон Гука $F = -kx$ и определение силы через потенциал $F = -\nabla V$. (Указание: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$).

2. Решить классическое уравнение динамики для г.о., найти частоту колебаний ω и написать H через ω. (Указание: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$).

3. Привести гамильтониан г.о. к виду

$$H = \hbar\omega H_0,\ H_0 = \frac{1}{2}(X^2 + P^2) \tag{A.4}$$

для подходящих операторов X, P, и найти $[X, P]$. (Указание: $X = \sqrt{m\omega/\hbar}x,\ P = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}},\ [X, P] = i$.

4. Определим операторы

$$a = \frac{X + iP}{\sqrt{2}},\ a^+ = \frac{X - iP}{\sqrt{2}}. \tag{A.5}$$

Найти $[a, a^+]$ и выразить H_0 через них. (Указание: $[\alpha, a^+] = 1,\ H_0 = a^+a + \frac{1}{2}$.

5. Доказать, что если $|\phi_1\rangle$ - собственный вектор H_1 с собственным значением c_1, то $a^+|\phi_1\rangle$ - собственный вектор H_1 с собственным значением $c_1 + 1$, а если $a|\phi_1\rangle \neq 0$, то $a|\phi_1\rangle$ - собственный вектор H_1 с собственным значением $c_1 - 1$.

6. Найти собственное состояние H с собственным значением $\hbar\omega/2$, решив задачу на собственные значения H. Это состояние обозначается через $|0\rangle$ и называется вакуумным. Указание: решение искать в виде гауссиана. Ответ:

$$|0\rangle = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \tag{A.6}$$

7. Доказать, что $a|0\rangle = 0$ и $|0\rangle$ - единственное состояние с таким свойством. (Указание: использовать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши).

8. Используя тот факт, что спектр гамильтониана H ограничен снизу, доказать, что он а) имеет вид $\frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$ при $n = 0, 1, ...$, б) невырожден. Использовать результаты задач 5 и 7.

9. Обозначим через $|n\rangle$ собственное состояние H с собственным значением $\frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$ и единичной нормой. Найти закон действия операторов a, a^+ и a^+a на $|n\rangle$. Указание: использовать результат задачи 4. Ответ:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,\ a^+a|n\rangle = n|n\rangle. \tag{A.7}$$

Задача 9 дает основание назвать операторы $a,\ a^+,\ a^+a$ операторами уничтожения кванта возбуждения, рождения кванта возбуждения и числа квантов возбуждения г.о. соответственно.

Модой электромагнитного поля называется частота и направление распространения кванта поля - фотона, а также его поляризация (направление его электрического поля). Из уравнений Максвелла вытекает, что если зафиксировать какую-то моду, классическая динамика поля описывается гармоническим осциллятором на данной частоте. Таким образом, при квантовом описании поля в данной моде состояния поля будут различаться только по числу n фотонов данной моды, а общий вид одномодового состояния будет иметь вид $|\Psi_{one\ mode}\rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n |n\rangle$.

А.3 Приближение вращающейся волны

Гамильтониан Джейса - Каммингса (Jaynes-Cummings, JC) имеет вид

$$H_{JC} = H_0 + H_1,\ H_0 = \hbar\omega a^+ a + \hbar\omega\sigma^+\sigma,\ H_1 = g(a^+ + a)(\sigma^+ + \sigma).$$

Целью данного цикла задач является доказательство **справедливости RWA**:

При $g/\hbar\omega \ll 1$ часть взаимодействия H_1 в гамильтониане H_{TC} можно заменить на $H_1^{RWA} = g(a^+\sigma + a\sigma^+)$, так что для нового гамильтониана

$$H_{JC}^{RWA} = H_0 + H_1^{RWA}$$

решение уравнения Шредингера будет с большой точностью совпадать с решением уравнения Шредингера для гамильтониана H_{JC}.

1. Введем вместо решения $|\Psi(t)\rangle$ уравнения Шредингера для гамильтониана H_{TC} другую волновую функцию

$$|\Psi_{int}(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\Psi(t)\rangle.$$

Доказать, что эта функция является решением уравнения Шредингера для нового гамильтониана

$$H_{int} = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} H_1 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}.$$

Этот гамильтониан называется представлением взаимодействия.

2. Доказать, используя определения, соотношения коммутации для бозонов (полевые операторы) и фермионов (атомные операторы), а также атомно-полевые коммутационные соотношения:

$$[a, a^+] = 1,\ \{\sigma, \sigma^+\} = 1, [a, \sigma] = [a^+, \sigma] = [a, \sigma^+] = [a^+\sigma^+] = 0.$$

3. Доказать следующую Лемму:

Лемма 1. $[H_0, H_1] = 2g\hbar\omega(a^+\sigma^+ - a\sigma)$.

(Указание: использовать результут задачи 2.)

4. Определим индукцией по n коммутатор n- ой степени:

$$F_1 = [H_0, H_1],\ F_n = [H_0, F_{n-1}].$$

Доказать формулу

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k H_0^k H_1 H_0^{n-k} (-1)^{n-k}.$$

Указание: базис индукции - определение коммутатора, в шаге использовать соотношение на биномиальные коэффициенты

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

5. Доказать формулу

$$F_n = 2^n g(\hbar\omega)^n (a^+\sigma^+ + (-1)^n a\sigma).$$

Указание: использовать Лемму 1.

6. Доказать, что коэффициент K_n при t^n в разложении H_{int} по степеням t имеет при $n = 1, 2, ...$ вид

$$K_n = \frac{i^n}{\hbar^n n!} g\omega^n 2^n (a^+\sigma^+ + (-1)^n a\sigma),$$

а свободный член равен $g(a^+\sigma + a\sigma^+)$. Указание: использовать результаты задач 4 и 5.

7. Доказать формулу

$$H_{int} = g(a^+\sigma + a\sigma^+ + a^+\sigma^+ e^{2i\omega t} + a\sigma e^{-2i\omega t}).$$

Указание: использовать результат задачи 6.

8. Доказать **справедливость RWA** (см. начало). Указание: использовать результат задачи 7, теорему Лейбница о знакочередующихся рядах и тот факт, что действительная и мнимая части решения уравнения Шредингера являются кусочно-монотонными функциями (функциями, монотонными на любом участке разбиения области определения на конечное число сегментов). Осцилляции мнимых экспонент в формуле из задачи 7 приводят к тому, что поправка к решению уравниения Шредингера при переходе от H_{JC} к H_{JC}^{RWA} становится бесконечно малой при $g/\hbar\omega \to 0$.

A.4 Явный вид темных состояний в модели TC

Доказательство Теоремы о структуре темных состояний **??**.

Докажем сначала пункт 1. Поскольку состояние $|\Psi\rangle = \sum\limits_j \lambda_j |j\rangle$ является темным тогда и только тогда, когда выполнена система уравнений (**??**), принадлежность $|\Psi\rangle \in D_k^n$ эквивалентна выполнению системы S_k^n, состоящей из всех равенств вида

(**??**) для всех j', таких что $1(j') = k-1$. Если $k = n$, то $dim(D_k^n) = 0$ и пункт 1 выполнен; поэтому достаточно рассмотреть случай $k < n$. Тогда различным j' будут соответствовать различные уравнения из S_k^n. Поскольку в системе S_k^n имеется C_n^k неизвестных и C_n^{k-1} уравнений, для доказательства пункта 1 достаточно показать, что все уравнения в S_k^n независимы.

Любая перестановка π из группы S_n естественным образом действует на множестве $B = \{0,1\}^n$ всех бинарных строк j длины n; результат такого действия обозначаем через πj. В частности, подстановка $(a,b) \in S_n$ действует как транспозиция двух кубитов с номерами a и b данной строки. Назовем такую транспозицию существенной, если два затрагиваемых в ней кубита имеют разные значения. Тогда существенными будут те и только те транспозиции, которые меняют строку, на которую они действуют.

Лемма 0. Для любой строки $j \in B$ и любого $\pi \in S_n$ строка πj имеет вид $(a_s,b_s)(a_{s-1},b_{s-1})...(a_1,b_1)j$, где все номера $a_1,a_2,...,a_s,b_1,b_2,...,b_s$ различны, и s равно удвоенному расстоянию Хамминга между j и πj.

Доказательство. Пусть s минимальное из таких чисел, что для некоторого набора подстановок $(a_q,b_q),\ q = 1,2,...,s$ строка πj имеет вид $(a_s,b_s)(a_{s-1},b_{s-1})...(a_1,b_1)j$. Докажем, что все номера
$a_1,a_2,...,a_s,b_1,b_2,...,b_s$ различны. Действительно, пусть это не так, и какой-то кубит затрагивается дважды. Поскольку всегда $(a,b) = (b,a)$ и подстановки вида (a,b) и (c,d) для различных a,b,c,d коммутируют, мы можем, меняя местами подстановки вида (a_q,b_q) добиться, чтобы рядом оказались две подстановки $(a_q,b_q),(a_{q-1},b_{q-1})$, такие что $b_{q-1} = a_q$. Так как s минимально, среди номеров кубитов a_q,b_q,a_{q-1},b_{q-1} ровно 3 различных, можно считать, что номера кубитов a_{q-1},a_q,b_q различны.

Значения этих кубитов в бинарной строке
$j' = (a_{q-2},b_{q-2})(a_{q-3},b_{q-3})...(a_1,b_1)j$ обозначим через a,b,c. В силу минимальности s $a \neq b$ и можно считать, что $a = 0, b = 1$. Если $c = 0$, подстановка (a_q,b_q) будет лишней. Если $c = 1$, $(a_q,b_q),(a_{q-1},b_{q-1})j' = (a_{q-1},b_q)j'$ и опять нарушено условие минимальности. Таким образом, все кубиты, участвующие в рассматриваемых подстановках, имеют различные номера, и значения их в каждой подстановке также различны. Отсюда вытекает равенство s удвоенному расстоянию Хамминга между j и πj. Лемма 0 доказана.

Определим на множестве B_{k-1}^n естественную метрику, положив расстояние $d(j,j')$ между базисными состояниями $j,\ j' \in B_{k-1}^n$ равным половине расстояния Хамминга между ними, что, в силу Леммы 0, равно минимальному числу транспозиций (перестановок пары кубитов) в переходе от j к j'.[1]

Последовательность состояний $j_0,j_1,...,j_r$, такую что любой переход $j_i \longrightarrow j_{i+1}$, $i = 0,1,...,r-1$ в ней является существенной транспозицией, назовем правильной, если любой кубит затрагивается в ней не более чем однажды.

Зафиксируем произвольно $j_0 \in B_{k-1}^n$.

[1]Так определенное расстояние - через число транспозиций, удобнее хамминговского, так как последнее между элементами B_{k-1}^n всегда четно.

Лемма 1. Пусть $j_0, j_1, j_2, \ldots, j_r$ - последовательность состояний из B^n_{k-1}. Если для любого $q = 0, 1, \ldots r-1$

$$d(j_q, j_0) = d(j_{q+1}, j_0) - 1,\ d(j_{q+1}, j_q) = 1, \tag{A.8}$$

то существует правильная последовательность транспозиций вида $j_0 \longrightarrow j_1 \longrightarrow \ldots j_r$, транспозиции в которой определены однозначно и наоборот, если существует такая правильная последовательность транспозиций, то для любого $q = 0, 1, \ldots, r-1$ выполнены равенства (A.8).

Индукция по r. Базис очевиден. Шаг. Пусть Лемма 1 верна для $r-1$ и докажем ее для r. Пусть сначала выполнены равенства (A.8). По предположению индукции существует правильная последовательность P транспозиций $j_0 \longrightarrow \ldots j_{r-1}$, и, в силу $d(j_{q+1}, j_q) = 1$ переход $j_{r-1} \longrightarrow j_r$ - тоже есть транспозиция. Эта транспозиция должна менять ноль и единицу, так как в противном случае мы имели бы противоречие с условием $d(j_{r-1}, j_0) = d(j_r, j_0) - 1$. Тогда если правильность нарушается на данном шаге, существует кубит, дважды участвующий в транспозициях из $j_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_r$, причем он затрагивается именно на последнем шаге $j_{r-1} \longrightarrow j_r$. Но тогда мы могли бы сократить эту последовательность транспозиций, получив противоречие с условием $d(j_q, j_0) = d(j_{q+1}, j_0) - 1$. Действительно, не ограничивая общности, можно предположить, что последовательность транспозиций P перемещает единицы из кубитов с номерами $1, 2, ..., r-1$ на позиции $r, r+1, ..., 2r-2$ в произвольном порядке, на которых первоначально стояли нули. Причем последняя транспозиция $j_{r-1} \longrightarrow j_r$ перемещает кубит с номером $2r-2$ либо на место $r-1$, либо на место $2r-1$. В первом случае последовательность P можно заменить более короткой, так как в результате ее действия могут фактически перемещаться только $r-2$ кубита. Во втором случае укоротить можно последовательность $j_0 \longrightarrow j_1 \longrightarrow \ldots j_r$, так как в ней фактически только $r-1$ единиц замещаются нулями, а это в силу Леммы 0 означает, что $d(j_{r-1}, j_0) = d(j_r, j_0)$, что противоречит условию.

Пусть теперь последовательность $j_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_r$ - правильная последовательность транспозиций, и, по предположению индукции, равенства (A.8) выполнены для всех $q = 0, 1, \ldots, r-1$. Второе равенство будет выполнено в силу того, что $j_{r-1} \longrightarrow j_r$- транспозиция. Если нарушено равенство $d(j_{r-1}, j_0) = d(j_r, j_0) - 1$, то переход от j_0 к j_r можно сделать менее чем за r транспозиций и (определенное нами) расстояние между j_0 и j_r меньше r, что противоречит правильности последовательности $j_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_r$, так как в ней каждый кубит затрагивается только один раз, и потому расстояние между j_0 и j_r равно r. Лемма 1 доказана.

Определим частичный порядок на B^n_{k-1}, положив $j_1 < j_2$, тогда и только тогда, когда существует правильная последовательность транспозиций вида $j_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_2$. Тогда мы можем расположить все состояния в B^n_{k-1} в узлах графа D, в начальной вершине которого находится j_0, и для любой вершины j' все вершины j, лежащие выше j', соединенные с j' ребром, удовлетворяют равенствам $d(j, j_0) = d(j', j_0) + 1$ и получаются из j' ровно одной транспозицией. При этом любой геометрически монотонно возрастающий путь на этом графе будет содержать вершины j в порядке возрастания значения $d(j, j_0)$, согласно определенному порядку $<$. Существование и единственность такого графа D вытекает из Леммы 1. Мы будем последовательно нумеровать ярусы этого графа, начиная с нулевого, на котором расположено j_0.

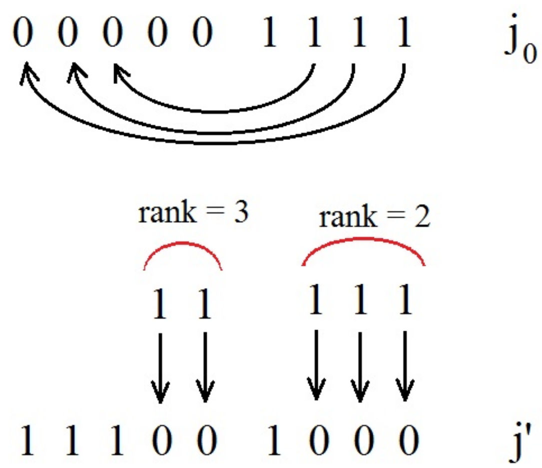


Рис. А.1: j' - родоначальник ранга 3, полученный из j_0 указанными в верхней части рисунка подстановками. Два члена его семьи имеют ранг 3, а три члена - ранг 2: вместо замены нуля единицей в любом кубите q из $rem(j')$ можно в переходе $j_0 \to \ldots \to j'$ не делать подстановку с кубитом q, получив вместо j' нового родоначальника для члена $[j']$ ранга 2.

Базисные состояния $j' \in B^n_{k-1}$, лежащие в ярусе p, назовем родоначальниками ранга p. Ранг родоначальника равен общему числу номеров кубитов, которые равны единице в j_0, и нулю - в j', то есть нашему расстоянию между этими вершинами. Мы будем обозначать множество этих номеров кубитов через $rem(j')$. Рангом состояния $j \in B^n_k$ назовем минимальный ранг родоначальника $j' \in B^n_{k-1}$, семья которого содержит j: $j \in [j']$. Ранг состояния $j \in B^n_k$ обозначается через $r(j)$.

Лемма 2. Пусть родоначальник $j' \in B^n_{k-1}$ имеет ранг p. Тогда ровно p членов его семьи имеют ранг $p-1$, остальные $n-k+1-p$ имеют ранг p.

Доказательство. Заметим сначала, что $0 \leq p \leq min\{k-1, n-k+1\}$. Из определения ранга элементов B^n_k следует, что члены семьи $[j']$, имеющие ранг $p-1$, есть в точности базисные состояния j, полученные из j' заменой нуля единицей в каком-то кубите из $rem(j')$. Тогда все остальные члены семьи $[j']$ будут иметь ранг p (см. рисунок А.1). Лемма 2 доказана.

Заметим, что, например, при $k = n$ существует единственная семья с родоначальником нулевого ранга, и эта семья состоит ровно из одного члена, у которого все кубиты единичны. Ранг этого члена также будет нулевым.

Определим значения амплитуд λ^0_j для всех $j \in B^n_k$ в зависимости от ранга j следующим образом. Пусть $p = r(j)$. Положим

$$\lambda^0_j = (-1)^p \frac{p!}{\prod\limits_{s=0}^{p}(n-k+1-s)}. \tag{A.9}$$

Корректность этого определения следует из Леммы 2, которая обеспечивает отсутствие нулей в знаменателе. Действительно, в силу $p \leq n-k+1$ единственная

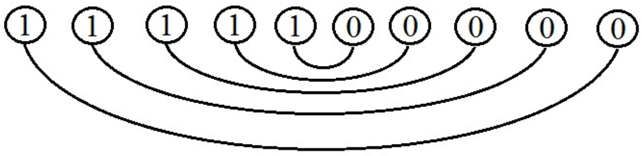


Рис. A.2: Структура синглетного состояния - тензорного произведения синглетов. В него входят все пары кубитов, соединенные любой дугой, так что значения кубитов выбираются либо так, как показано на рисунке, либо противоположным образом. При этом знак пары отрицательный, если 1 предшествует 0 (как указано на рисунке), и положительный в противном случае.

возможность появления таких нулей - значение $s = p = n - k + 1$. Однако число таких состояний $j \in B_k^n$, для которых $p = n - k + 1$, в силу Леммы 2, равно нулю.

Тогда уравнение (**??**) не будет выполняться для $j' = j_0$, так как сумма значений амплитуд для членов семьи нулевого ранга по Лемме 2 составит $(n-k+1)/(n-k+1) = 1$. Для членов семьи ненулевого ранга p уравнение (**??**) будет выполнено. Действительно, в силу Леммы 2 в такой семье будет ровно p членов ранга $p-1$, и ровно $n-k+1-p$ - ранга p. Подставляя значения амплитуды λ_j^0 из формулы (A.9) для p и $p-1$, преобразуем уравнение (**??**) в сумму слагаемых вида

$$(-1)^{p-1}\frac{(p-1)!p}{\prod\limits_{s=0}^{p-1}(n-k+1-s)} + (-1)^p\frac{p!(n-k+1-p)}{\prod\limits_{s=0}^{p}(n-k+1-s)} = 0.$$

Выполнение уравнения (**??**) для любой семьи ненулевого ранга и его нарушение для семьи нулевого ранга при выбранных значениях переменных доказывает, что уравнение (**??**) для $j' = j_0$ не зависит от других уравнений этого вида. В силу произвольности выбора $j_0 \in B_{k-1}^n$ все уравнения системы S_k^n независимы, что и требовалось.

Пункт 1 Теоремы доказан.

Заметим, что из этого пункта следует, что всякое невидимое в RWA приближении состояние является равновесным. Действительно, если состояние темное, то $2k \leq n$, потому что иначе размерность темного подпространства нулевая. С другой стороны, если состояние - прозрачное, то при замене нулей единицами и наоборот оно станет темным, и мы имеем $2k \geq n$, откуда $n = 2k$.

Докажем теперь пункт 2. Любой (n, k)- синглет можно, с точностью до перестановки кубитов, представить в следующем ненормированном виде, где опущены сомножители, имеющие вид $|0\rangle$ (число таких сомножителей равно $n - 2k$):

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}\rangle = |(1 * \ldots ** \ldots * 0 - 0 * \ldots ** \ldots * \quad & 1)(*1 \ldots ** \ldots 0 * - * 0 \ldots ** \ldots 1 *) \\ \ldots \quad & (* \ldots * 10 * \ldots * - * \ldots * 01 * \ldots *)\rangle. \end{aligned} \tag{A.10}$$

который схематично изображен на рисунке A.2.

Линейную оболочку множества A обозначаем через $L(A)$, ортогональное дополнение к подпространству L обозначаем через $L^{\perp}$, мощность произвольного множества A обозначаем через $|A|$.

Пусть p, q- пара номеров кубитов, $p \neq q$. Рассмотрим двухкубитное пространство $l(p, q)$, порожденное кубитами с номерами p и q, и введем для синглетных и триплетных состояний в этом пространстве следующие обозначения:

$$s_{p,q} = |0\rangle_p|1\rangle_q - |1\rangle_p|0\rangle_q,\ t^0_{p,q} = |0\rangle_p|1\rangle_q + |1\rangle_p|0\rangle_q,\ t^1_{p,q} = |0\rangle_p|0\rangle_q,\ t^{-1}_{p,q} = |1\rangle_p|1\rangle_q. \quad (A.11)$$

Первое представляет синглет, три других - триплетные состояния. Эти состояния образуют ортогональный базис в $l(p, q)$.

Рассмотрим произвольное состояние $|\Psi\rangle \in L(B^n_k)$ и пусть $(p, q)|\Psi\rangle$- обозначает состояние, полученное из $|\Psi\rangle$ перестановкой кубитов p и q. Введем процедуру антисимметризации состояния $|\Psi\rangle$ - равенством

$$An_{p,q}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle - (p, q)|\Psi\rangle.$$

Отметим, что если $|\Psi\rangle$ было темным, то $An_{p,q}|\Psi\rangle$ будет также темным при любых p, q.

Через $r(p, q)$ обозначим множество базисных состояний $|r\rangle$ множества всех атомов, кроме двух: p и q. Обозначим через $L_{p,q}$ подпространство $\mathcal{H}^n_k$, состоящее из состояний вида $s_{p,q} \otimes |R\rangle$, где $|R\rangle \in L(r(p, q))$. Заметим, что эти пространства в общем случае не являются ортогональными для различных пар p, q.[2]

Лемма 3.

Для $p \neq q$ $Im(An_{p,q}) = L_{p,q}$, $Ker(An_{p,q}) = L^{\perp}_{p,q}$ и для $|\Psi\rangle \in L_{p,q}$ имеет место равенство $An_{p,q}|\Psi\rangle = 2|\Psi\rangle$.

Доказательство. По определению, антисимметризация по p, q всегда даст состояние, принадлежащее $L_{p,q}$. Мы имеем: $L^{\perp}_{p,q}$ состоит из состояний вида

$$t^0_{p,q}|\psi^0\rangle + t^1_{p,q}|\psi^1\rangle + t^{-1}_{p,q}|\psi^{-1}\rangle,$$

где $|\psi^s\rangle \in L(r(p, q))$ при $s \in \{0, 1, -1\}$. Применение антисимметризации к таким состояниям дает ноль. Антисимметризация, примененная к состояниям из $L_{p,q}$, даст их удвоение. Если же $|\Phi\rangle \in Ker(An_{p,q})$, то, поскольку, по доказанному, ортогональная компонента состояния зануляется антисимметризацией, а прямая - удваивается, мы имеем $|\Phi\rangle \in L^{\perp}_{p,q}$. Лемма 3 доказана.

Введем проектор $\mathcal{P}_{p,q}$ на подпространство $L_{p,q}$ естественным образом:

$$\mathcal{P}_{p,q} = \frac{1}{2} \sum_{k \in r(p,q)} |s_{p,q} \otimes k\rangle\langle s_{p,q} \otimes k|. \quad (A.12)$$

Тогда Лемма 3 может быть в эквивалентной форме компактно записана в виде такого Следствия:

[2] Читателю предлагается доказать, что скалярное произведение двух состояний из $D^n_{n/2}$, являющихся тензорными произведениями синглетов, всегда является ненулевой степенью двойки 2^{-r}.

Следствие: $An_{p,q} = 2\mathcal{P}_{p,q}$.

Состояние $|D\rangle \in D_k^n,\ k > 0$ мы назовем сингулярным, если оно ортогонально всем (n,k)- синглетам. Для доказательства пункта 2 Теоремы достаточно показать, что сингулярное состояние обязано быть нулевым. Для этого нам потребуется ряд дополнительных фактов, касающихся подпространства D_k^n темных состояний.

Лемма 4.

При $k > 0$

$D_k^n \subset L(\bigcup\limits_{p\neq q} L_{p,q})$.

Доказательство.

В данной Лемме необходимо представить любое темное состояние в виде суммы состояний, в каждом из которых некоторый двух-кубитный синглет присутствует как тензорный множитель. Трудность здесь в том, что синглеты не являются ортогональными, и два таких состояния могут быть не полностью различимыми физически. Поэтому нам надо для доказательства данной Леммы более детально рассмотреть траектории отдельных малых порций амплитуды до их полного сокращения при виртуальном испускании фотона.

Действие группы S_n на кубитах в виде их перестановок естественным образом продолжается до операторов на всем пространстве квантовых состояний $\mathcal{H}$, а именно: на базисных состояниях атомов перестановка $\eta \in S_n$ действует непосредственно на атомную компоненту, оставляя полевую без изменений, а $\eta \sum\limits_{j_p,j} \lambda_{j_p,j}|j_p\rangle|j\rangle = \sum\limits_{j_p,j} \lambda_{j_a,j}|j_a\rangle\eta|j\rangle$.

Теперь мы можем доказать Лемму 4.

Выберем число $k \in \{1,2,...,N-1\}$ и пусть $|D\rangle \in D_k^n$. Рассмотрим подпространство $\tilde{\mathcal{H}}_{k,0}^n$, определенное выше. Состояние $|0\rangle_p|D\rangle \in \tilde{\mathcal{H}}_{k,0}^n$ будет связным относительно гамильтониана $H = H_{TC}^{RWA} - k\hbar\omega I$, так как $D_k^n \subset \mathcal{H}_k^n$, все состояния из B_k^n получаются одно из другого перестановкой атомных кубитов, и эти перестановки коммутируют с H (см. Пример к Предложению выше).

Тогда H совпадает с оператором $a^+\bar{\sigma} + a\bar{\sigma}^+$ на подпространстве $\mathcal{H} = |0\rangle_p \otimes \mathcal{H}_k^n$, то есть темные состояния из D_k^n есть атомные части состояний из ядра H, ограниченного на $\mathcal{H}$. Поскольку все атомы одинаково взаимодействуют со светом, мы можем считать, что все ненулевые элементы H одинаковы, а изменив масштаб времени - что они равны единице.

Применим Теорему о квантовании амплитуды (см. Главу 3, **??**) к гамильтониану H и начальному состоянию $|\Psi\rangle = |0\rangle_p|D\rangle \in Ker(\bar{\sigma})|_{\mathcal{H}}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы получим приближение состояния $cH|\Psi\rangle$ с точностью порядка ε с помощью θ- сдвига для того квантования θ размера ϵ порядка ε^2, существование которого утверждается в Теореме о квантовании амплитуды. Мы имеем: $cH|\Psi\rangle = 0$. Далее в переходе $|0\rangle_p|j\rangle \to |1\rangle_p|i\rangle$ мы опускаем фотонную часть.

Следствие из Теоремы о квантовании амплитуды означает, что мы можем разложить амплитуды $\lambda_j = \langle j|\Psi\rangle$ исходного состояния в сумму слагаемых $\pm(i)\epsilon$ так, что каждому вхождению такого слагаемого в разложение амплитуды любого базисного состояния $|j\rangle$ в состояние $|\Psi\rangle$ будет соответствовать ровно одно слагаемое вида $\pm(i)\epsilon$ в разложении амплитуды некоторого базисного состояния $|i\rangle$ в результирующее состояние $|\theta\Psi\rangle$, это соответствие будет взаимно однозначным, причем переход вида $|j\rangle \to |i\rangle$ будет испусканием фотона, то есть атомная часть состояния $|i\rangle$ будет получаться из атомной части $|j\rangle$ заменой одной единицы нулем.

Объединим некоторые вхождения ϵ в амплитуды разложения результирующего состояния во взаимно сокращающиеся пары: $\pm(i)\epsilon$, соответствующие одному базисному состоянию. Тогда соответствующие слагаемые исходного состояния будут представлять собой синглеты, так как пара исходных базисных состояний $|j\rangle$ принадлежит одной семье, в силу свойства **Q** квантования амплитуд они различны, и их аплитуды противоположны. Поскольку разница между $|\theta\Psi\rangle$ и $cH|\Psi\rangle = 0$ (c, конечно, зависит от ε) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу (**??**), доля сокращающихся квантов может быть сделана сколь угодно близкой к единице при уменьшении ε.

Сумма таких пар состояний будет принадлежать множеству вида $L_{p,q}$, так как такое сокращение означает наличие одного синглета в разложении базисных состояний. Поскольку базисных состояний - фиксированное число, устремляя $\varepsilon \to 0$, мы получим последовательность линейных комбинаций состояний из $L_{p,q}$, сходящуюся к некоторой такой комбинации, которая и будет искомым представлением $|D\rangle$. Лемма 4 доказана.

Пусть $|D_0\rangle$ - сингулярное состояние. В силу Леммы 4 имеем

$$|D_0\rangle = \sum_{p\neq q} s_{p,q} \otimes |D_{p,q}\rangle, \tag{A.13}$$

где $|D_{p,q}\rangle$- состояния, содержащие $n-2$ кубита.

Каждое слагаемое этой суммы принадлежит подпространству $L_{p,q}$. При этом трудность в том, что мы не можем утверждать, что $|D_{p,q}\rangle$- темные состояния, то есть испускание фотона атомами в любом из этих состояний может компенсироваться испусканием фотона атомом, состояние которого принадлежит иному $|D_{p',q'}\rangle$, где $p' \neq p$ или $q' \neq q$.

Мы преодолеем эту трудность с помощью операции антисимметризации. Положим $|D'_{p,q}\rangle = An_{p,q}|D_0\rangle$. Тогда $|D'_{p,q}\rangle$ при любых $p \neq q$ будет сингулярным, так как темнота и ортогональность синглетам сохраняется при перестановке атомов и вычитании.

Покажем, что среди всевозможных состояний $|D'_{p,q}\rangle$ есть ненулевое. Действительно, пусть все такие состояния - нулевые. Тогда, в силу Леммы 3, для любой пары $p \neq q$ $|D_0\rangle \in L^{\perp}_{p,q}$, и, следовательно, состояние $|D_0\rangle$ принадлежит ортогональному дополнению линейной оболочки всех $L_{p,q}$. Но в этом случае оно нулевое, так как само принадлежит этой линейной оболочке в силу (A.13).

Итак, среди $|D'_{p,q}\rangle$ есть ненулевое; пусть оно соответствует паре $p = 1, q = 2$: $|D'_{1,2}\rangle$. Это состояние - сингулярное, и оно принадлежит $L_{1,2}$, то есть имеет вид $s_{1,2} \otimes |D_1\rangle$.

Тогда $|D_1\rangle$ - тоже сингулярное состояние от $n-2$ кубитов. Действительно, $|D_1\rangle$ - темное, так как получено отщеплением одного синглета $s_{1,2}$ от темного состояния. Если бы оно не было сингулярным, то оно имело бы ненулевую проекцию на линейную оболочку $(n-2,k)$ синглетов, полученных при удалении первых двух кубитов из основного пространства. Но тогда умножение его на один синглет - $|D'_{1,2}\rangle$ тоже имело бы ненулевую проекцию уже на линейную оболочку (n,k) синглетов, что противоречит сингулярности $|D'_{1,2}\rangle$.

Итак, $|D_1\rangle$ - сингулярное состояние из $n-2$ кубитов.

К нему мы применим те же рассуждения, что и к $|D_0\rangle$, получая сингулярное $|D_2\rangle$ от $n-4$ кубитов, и т.д. В конце концов, мы получим сингулярный синглет D_k или сингулярное произведение основных состояний атомов, что противоречит определению сингулярности. Теорема доказана.

Заметим, что если в приближении RWA состояние является темным, но не невидимым, то $n/2>k$ и в каждой компоненте его синглетного разложения есть нулевые тензорные сомножители вида $|0\rangle_q$. Для невидимого состояния таких нулевых компонент нет, то есть присутствуют только синглеты.

Итак, мы видим, что темные состояния в точной модели Тависа-Каммингса совпадают с невидимыми состояниями для этой модели в RWA приближении. Действительно, последние, как следует из теоремы, будут линейными комбинациями тензорных произведений ЭПР синглетов $|01\rangle-|10\rangle$, а каждый такой синглет сам по себе будет темным в точной модели Тависа-Каммингса. Этим объясняется преимущество термина "темные состояния": он охватывает не только не испускающие свет, но также и не поглощающие света.

Алгебраическое определение темного состояния для двух-уровневых атомов выглядит так: $J_{\pm}|\Psi\rangle=0$, где $J_{\pm}$- повышающий и понижающий оператор. В работе [24] доказано, что это эквивалентно выполнению раветства $U^{\otimes n}|\Psi\rangle=|\Psi\rangle$ для любого оператора $U\in SU(2)$ (такие состояния $|\Psi\rangle$ в той работе названы синглетными). Применяя нашу Теорему, мы получим, что стационарные точки группы $U^{\otimes n},\ U\in SU(2)$ являются в точности линейными комбинациями тензорных произведений ЭПР - синглетов, что означает эквивалентность определения темноты в работе [24] и нашего определения темноты для точного решения.

В работе [24] также дана похожая алгебраическая характеристика темных состояний d- уровневых атомов при $d>2$; явное описание таких состояний представляет интересную задачу.

A.5 Энтропия

Энтропия - понятие из термодинамики, означающее меру хаоса в каком-либо статистическом распределении вероятностей $\bar{p}=(p_1,p_2,...,p_N)$. Одновременно, если применить это понятие к информационному каналу, оно будет характеризовать его пропускную способность. Если Алиса посылает Бобу информацию в виде строки независимых битов, число этих битов, переданных в единицу времени, и будет пропускной способностью канала.

Пусть Алиса посылает класические символы $1, 2, ..., N$, причем делает это для каждого символа с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_N$ соответственно, посылая какой-либо символ в каждый малый интервал времени dt. Сколько битов в секунду она может передать Бобу? Если бы у нее был всего один символ 1, какую информацию она могла бы передать, посылая только лишь один этот символ? Эта информация только одна: момент времени, когда она его посылает, больше ничего она Бобу передать одним символом не сможет. Поскольку вероятность посылки 1 равна p_1, время появления этого символа в канале пропорционально $1/p_1$, а так как число битов числа пропорционально его логарифму, мы получаем, что с помощью символа 1 Алиса может передать число битов, пропорциональное $-log(p_1)$, умноженному на p_1, потому что этот символ вообще может появиться с вероятностью p_1, и только если он появится, вступает в силу момент времени.

Поскольку все биты независимы, мы получаем выражение для классической энтропии Шеннона

$$S(\bar{p}) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \; log(p_i). \tag{A.14}$$

Квантовый аналог - энтропия фон Неймана от матрицы плотности ρ, определяется как $N(\rho) = -tr(\rho \; log(\rho))$, где логарифм матрицы определяется через степенной ряд. Она совпадает с энтропией Шеннона для диагональной формы матрицы ρ. $N(tr_1(\rho_{comp}))$ служит мерой запутанности состояния ρ_{comp} композитной системы, если след берется по одной из компонент (неважно какой, результат будет одним). Связь энтропии фон Неймана с пропускной способностью немного более сложна, чем в классическом случае, так как в канал могут поступать не только чистые, но и смешанные состояния; в общем случае пропускная способность квантового канала определяется границей Холево (см. [58]).

A.6 Конструктивный математический анализ

Мы видели конфликт математического анализа и квантовой теории, конфликт, осложняющий ее применение к сложным системам. У этой проблемы есть корректное математическое решение. Это решение открыл Андрей Марков - младший в 70-х годах прошлого века: конструктивный математический анализ (см. [59]). Он основан на понятии конструктивного действительного числа.

Конструктивное действительное число - это такое действительное число x, что существует алгоритм, выдающий одно за другим рациональные приближения x, сходящиеся к самому x. Вычисление по этому алгоритму просто выдает последовательность $r_1, r_2, ..., r_n, ... \to x$ $(n \to \infty)$, где r_i- рациональные числа, то есть они кодируются в виде пар натуральных чисел, в виде пар бинарных строк.

Возникает естественный вопрос. Заданы два конструктивных числа x и y, заданы в виде своих алгоритмов приближений: A_x и A_y, потому что иначе их задать нельзя, только в виде алгоритмов. Спрашивается, можно ли определить алгоритмически, равны эти числа или нет? Читателю предлагается подумать над этим вопросом.

Указание. Если бы существовал алгоритм, который по паре алгоритмов A_x, A_y, *определял, равны ли числа x и y, то существовал бы алгоритм, который по паре A, x - алгоритм A и входное слово x определял бы, закончит алгоритм A работу над словом x, или нет. А этого сделать нельзя: задача применимости алгоритма к слову алгоритмически неразрешима.*

Итак, ответ отрицательный: равенство конструктивных действительных чисел алгоритмически неразрешимо.

Это соответствует физике. Мы можем знать константы: постоянную Планка, скорость света, заряд электрона и т.п. только с некоторой точностью. Их точных значений никто не знает. Теория дает лишь метод нахождения приближенных значений этих констант. Расчет величины магнитного момента электрона, произведенный методом фейнмановских диаграмм[3] дает очень хорошее, до семи знаков после запятой, но все же приближенное значение!

Конструктивных чисел - счетное множество, тогда как всех чисел - континуум. Значит, подавляющее большинство чисел - не конструктивны. Читателю предлагается привести пример хоть одного неконструктивного числа. *Все числа, которые хоть как-то используются в физике - конструктивны.*

Что такое конструктивная вещественная функция f конструктивной вещественной переменной? Это алгоритм A^f, который по входу - приближению r_n^x аргумента x, выдает приближение r_n^y значения функции $y = f(x)$. Требуется, чтобы если $r_n^x \to x$ $(n \to \infty)$, то $r_n^y \to y$ $(n \to \infty)$.

Задача. Будет ли функция Хэвисайда

$$\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \leq 0, \\ 1 & \text{если } x > 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

конструктивной?

Указание. Ответ: нет. Применить уже упоминавшуюся неразрешимость проблемы применимости алгоритма к паре "алгоритм, слово".

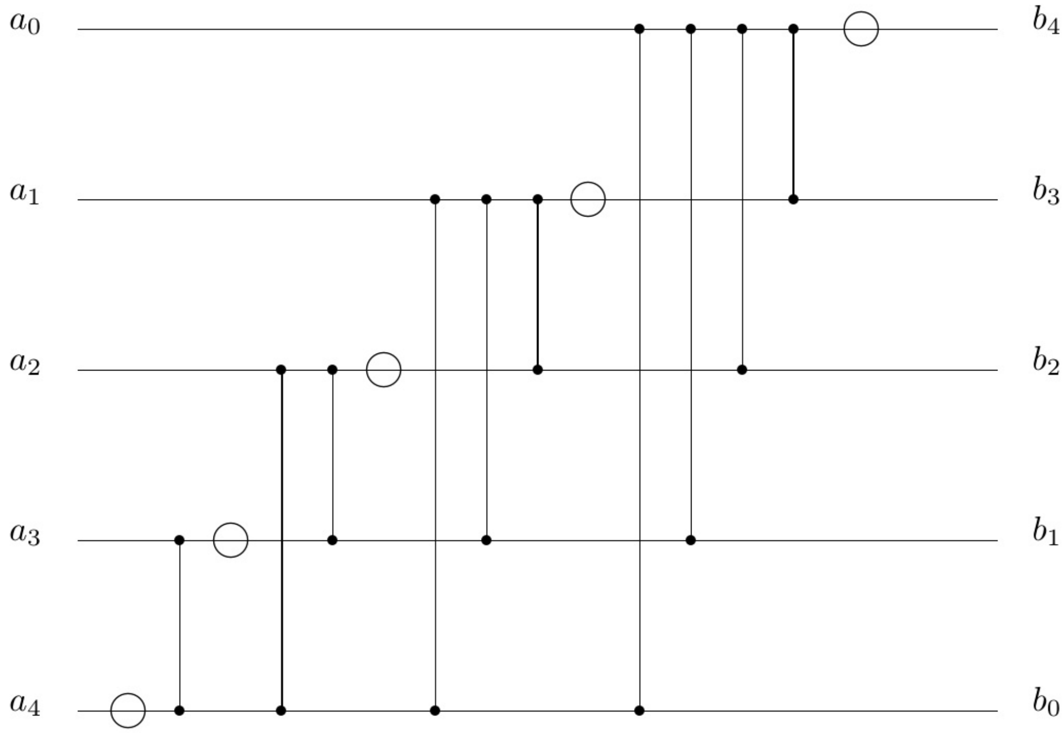
Справедливо и более сильное утверждение - Теорема Маркова - Цейтина ([59], [60]):

Любая конструктивная вещественная функция непрерывна.

Эта теорема говорит о том, что любая дискретизация реального процесса должна допускать сглаживание. Фактически, это именно то, что в частном случае доказали Боголюбов с Парасюком - корректность перенормировок квантовой электродинамики. Для моделирования на квантовом компьютере возможность такого сглаживания - четкий ориентир, которому надо следовать.

[3]Это концептуально то же, что и фейнмановские интегралы по траекториям, просто роль траектории играет диаграмма процесса, например, как фотон взаимодействует с атомом водорода; см. [2].

Рис. A.3: Реализация QFT^{-1} в виде массива квантовых гейтов.



A.7 Реализация квантового преобразования Фурье на квантовом компьютере

Договоримся представлять целое число вида $a = a_0 + a_0 2 + \ldots + a_{l-1} 2^{l-1}$ базисным состоянием $|a_0\ a_1\ \ldots\ a_{l-1}\ \rangle$ и располагать все a_j сверху вниз. Такое же соглашение примем и для выхода, только бинарные знаки b_j числа $b = b_0 + b_0 2 + \ldots + b_{l-1} 2^{l-1}$ будем писать в обратном порядке - снизу вверх.

Окружности здесь обозначают преобразование W^1, двухкубитовые операции имеют вид:

$$U_{k,j} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi/2^{k-j}} \end{array} \right),\ k > j. \tag{A.16}$$

Чтобы убедиться в этом, мы рассмотрим амплитуду перехода от базисного состояния a к базисному состоянию b. Это понятие законно, так называется соответствующий элемент матрицы рассматриваемого оператора. Здесь нам придется набраться терпения - подсчет идейно простой, но требует некоторого занудства. Сначала заметим, что модули всех таких амплитуд одинаковы и, так же как в обратном преобразовании Фурье, равны $1/2^{l/2}$, так что следить надо только за фазовым сдвигом, т.е. за аргументом ϕ комплексной амплитуды $e^{i\phi}$. Мы будем учитывать этот набег фазы, суммируя вклады от преобразований Уолша с вкладами от двухкубитных фазовых сдвигов. Введем для упрощения счета такое сокращенное обозначение: $b'_j = b_{l-1-j},\ j = 0, 1, \ldots, l-1$ - это понадобится для того, чтобы в нужный момент учесть обратный порядок расположения бинарных разрядов в a и b. Представим себе, как меняются состояния при продвижении слева направо по проводам нашей схемы. Собственно переход от a к b происходит только при совершении операции Адамара, двухкубитные операции диагональны и базисные состояния не меняют, добавляя только слагаемые к фазе. Вклад от операции Адамара будет таким: $\pi a_j b'_j$. Это число не равно нулю только если оба j-х разряда наших входных и выходных чисел равны 1, что в точности соответствует определению преобразования Адамара. Вклад от двухкубитовой операции при $j < k$ будет $\pi a_j b'_k / 2^{k-j}$, потому что состояние a меняется на b только при прохождении устройства Адамара, а как видно из рисунка 6, такая двухкубитовая операция совершается в момент, когда j-й кубит еще в состоянии a_j, а k-й - уже в состоянии b'_k. Суммируя все эти слагаемые фазового сдвига, и учитывая, что целое кратное π можно вообще в расчет не принимать, получаем вот что:

$$\begin{aligned}
&\pi \sum_{l>k>j\geq 0} \frac{a_j b'_k}{2^{k-j}} + \pi \sum_{l>j\geq 0} a_j b'_j = \\
&2\pi \sum_{l>j+k\geq 0} \frac{a_j b_k 2^{j+k}}{2^l} = \\
&2\pi \sum_{l>j,k\geq 0} \frac{a_j b_k 2^{j+k}}{2^l} = \\
&\frac{2\pi}{2^l} \sum_{l>j\geq 0} a_j 2^j \sum_{l>k\geq 0} b_k 2^j = \frac{2\pi}{2^l}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Это как раз то, что требуется в определении обратного преобразования Фурье. Если нам понадобится совершить прямое преобразование, достаточно обратить порядок функциональных элементов в рассматриваемой схеме и поставить знак минус перед фазовым сдвигом в определении двухкубитных операций.

А теперь посмотрим на то, что мы только что совершили. Построенная нами схема, реализующая преобразование Фурье, содержит порядка l^2 функциональных элементов. Заметим, что если мы не будем гнаться за точностью этого преобразования, то можно будет отбросить все двухкубитные операции, в которых участвуют слишком далекие друг от друга кубиты. Действительно, знаменатель в $\pi/2^{k-j}$ для них делает всю дробь пренебрежимо малой, экспонента будет почти единицей, т.е. такие преобразования почти единичны и их можно отбросить. Схема тогда значительно упростится - ее размер вообще будет линейным - порядка $C\ l$, где константа C будет, конечно, зависеть от выбранной нами точности.

Литература

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с. — 500 экз. — ISBN 978-5-9221-0819-5.

[2] R.Feynman, QED: The strange theory of linght and matter, Princeton University Press, 1985.

[3] R.Feynman, D.Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, 1984, Р.Фейнман, Д.Хиббс, Квантовая механика в интегралах по траекториям, Москва, Наука, Физ.-мат. лит.

[4] Ю. И. Богданова, Д. В. Фастовецас, Б. И. Бантыш, А. Ю. Чернявский, И. А. Семенихин, Н. А. Богданова, К. Г. Катамадзе, Ю. А. Кузнецов, А. А. Кокин, В. Ф. Лукичев, Методы анализа качества элементной базы квантовых информационных технологий, Квантовая электроника, 2018, том 48, N 11, страницы 1016–1022.

[5] Shor P. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring // Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on — IEEE, 1994. — P. 124–134. — ISBN 0-8186-6580-7 — doi:10.1109/SFCS.1994.365700

[6] P.Benioff, Quantum Mechanical Models of Turing Machines That Dissipate No Energy Phys. Rev. Lett., Vol. 48, 1982, pp. 1581–1585.

[7] Richard P. Feynman, Simulating Physics with Computers, International Journal of Theoretical Physics, VoL 21, Nos. 6/7, 1982, pp. 467-488.

[8] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. Smolin, H. Weinfurter, Elementary gates for quantum computation Phys.Rev. A52 (1995) 3457.

[9] А. Китаев, А. Шень, М. Вялый, Классические и квантовые вычисления, 1999. 192 с. ISBN 5-900916-35-9.

[10] L. Fedichkin, M. Yanchenko, K. A. Valiev, Novel coherent quantum bit using spatial quantization levels in semiconductor quantum dot, Quantum Computers and Computing 1, 58 (2000).

[11] L.Grover, A fast quantum mechanical algorithm for database search, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), May 1996, pages 212-219. Proceedings, Melville, NY, 2006, vol. 810, electronic version: xxx.lanl.gov, quant-ph/0610052.

[12] Y.Ozhigov, Lower bounds of a quantum search for an extreme point, Proc.Roy.Soc.Lond. A455 (1999) 2165-2172.

[13] C.H. Bennett, E. Bernstein, G. Brassard and U.V. Vazirani, ”Strengths and weaknesses of quantum computing” SIAM J. on Computing, Vol. 26, No. 5, pp. 1510–1523, 1997.

[14] C. Zalka: Grover's quantum searching algorithm is optimal. Phys. Rev. A 60 (1999) 2746–2751.

[15] Ozhigov Y.I. Quantum computers speed up classical with probability zero, Chaos, Solitons and Fractals, 1999, 10, 1147-1163.

[16] C.Zalka, Simulating quantum systems on a quantum computer, Proceedings of The Royal Society A 454(1969):313-322, January 1998.

[17] S.Wiesner, Simulations of Many-Body Quantum Systems by a Quantum Computer, arXiv:quant-ph/9603028.

[18] P.W.Shor, Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory, Phys. Rev. A 52, R2493(R), 1995.

[19] H. Breuer and F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems, Oxford (2002).

[20] A. V. Kulagin, V. Y. Ladunov, Y. I. Ozhigov, N. A. Skovoroda, and N. B. Victorova "Homogeneous atomic ensembles and single-mode field: review of simulation results Proc. SPIE 11022, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2018, 110222C (15 March 2019); https://doi.org/10.1117/12.2521763.

[21] R. Dicke, Phys. Rev . 93, 99 (1954).

[22] E.T. Jaynes, F.W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE 51 (1): 89–109, (1963). doi:10.1109/PROC.1963.1664

[23] Michael Thomas Tavis, A Study of an N Molecule Quantized-Radiation-Field Hamiltonian, Dissertation, https://arxiv.org/abs/1206.0078.

[24] P. Kok, K. Nemoto, and W. J. Munro, Properties of multi-partite dark states, e-print 2002 http://lanl.arxiv.org/abs/quant-ph/0201138.

[25] Knill, E., Laflamme, R., Milburn, G. J. (2001). "A scheme for efficient quantum computation with linear optics". Nature. Nature Publishing Group. 409 (6816): 46–52

[26] Gottesman, D., Chuang, I. L. (1999-11-25). "Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations". Nature. 402 (6760): 390–393

[27] Bennett, Charles H.; Brassard, Gilles; Crépeau, Claude; Jozsa, Richard; Peres, Asher; Wootters, William K. (1993-03-29). "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels". Physical Review Letters. 70 (13): 1895–1899.

[28] Popescu, S., Knill-Laflamme-Milburn Quantum Computation with Bosonic Atoms, PRL 99, 130503 (2007).

[29] G. Rempe, H. Walther, and N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser, Phys. Rev. Lett., 1987, Vol. 58, no. 4, p. 353.

[30] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate, Phys. Rev. Lett. 75, 4714 (1995).

[31] Azuma H., Quantum computation with the Jaynes-Cummings model, Prog. Theor. Phys. 126, 369-385 (2011).

[32] V. Ladunov, Y. Ozhigov, N. Skovoroda , Computer simulation of quantum effects in Tavis-Cummings model and its applications, SPIE Proceedings, vol. 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016; 102242X (2017) https://doi.org/10.1117/12.2267190

[33] Plenio, M., et al., "Dephasing assisted transport: Quantum networks and biomolecules New J. Phys. 10, 113019 (2008).

[34] Fenna, R. E.; Matthews, B. W. (1975). "Chlorophyll arrangement in a bacteriochlorophyll protein from Chlorobium limicola". Nature 258 (5536): 573–7. Bibcode:1975Natur.258..573F. doi:10.1038/258573a0

[35] Y.Ozhigov, Dark states of atomic ensembles: properties and preparation, Proc. SPIE 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016, 102242Y (December 30, 2016); doi:10.1117/12.2264516.

[36] A.V.Tsukanov, Optomechanical systems and quantum computing, Russian Microelectronics, September 2011, 40:333.

[37] Бор Н., Дискуссии с Эйнштейном о проблемах теории познания в атомной физике // Атомная физика и человеческое познание — М.: ИЛ, 1961. — стр. 60.

[38] Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. — М.: Наука, 1989. — 400 с. — ISBN 5-02-012452-9.

[39] V.M.Akulin, Dynamics of Complex Quantum Systems, Theoretical and Mathematical Physics, Spinger, 2006.

[40] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables"I". Physical Review. 1952, 85: 166–179.

[41] A.Khrennikov, Vaxjo Interpretation of Wave Function: 2012, Reconsideration of Foundations-6, AIP, 1508, 244-252 (2012), DOI: 10.1063/1.4773136.

[42] Aspect, Alain; Dalibard, Jean; Roger, Gérard (December 1982). "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time- Varying Analyzers". Physical Review Letters. 49 (25): 1804–1807.

[43] Jian-Wei Pan; D. Bouwmeester; M. Daniell; H. Weinfurter; A. Zeilinger (2000). "Experimental test of quantum nonlocality in three-photon GHZ entanglement". Nature. 403 (6769): 515–519.

[44] J. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox"; Physics, (1964), 1 (3): 195–200.

[45] J. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics"; Reeview of Modern Physics, (1966), 38, N3, стр. 447-452.

[46] Aspect, Alain; Dalibard, Jean; Roger, Gérard, (1982), Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time- Varying Analyzers. Physical Review Letters. 49 (25): 1804–1807. Bibcode:1982PhRvL..49.1804A. doi:10.1103/PhysRevLett.49.1804.

[47] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Anton Zeilinger, Going Beyond Bell's Theorem, in: 'Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe', M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht, 69-72 (1989).

[48] AIP Conference Proceedings, vol. 962, Quantum Theory: Reconsideration of foundations -4, ed. Guillaume Adenier, Andrei Yu. Khrennikov, Pekka Lahti, Vladimir I. Man'ko and Theo M. Nieuwenhuizen, (2007), ISBN: 978-0-7354-0479-3.

[49] F.Ablayev, C.Moore, C.Pollett, Quantum and Stochastic Branching Programs of Bounded Width, International Colloquium on Automata, Languages, and Programming , ICALP 2002: Automata, Languages and Programming pp 343-354.

[50] Dovesi, R., Civalleri, B., Roetti, C., Saunders, V. R. and Orlando, R. (2005) Ab Initio Quantum Simulation in Solid State Chemistry, in Reviews in Computational Chemistry, Volume 21 (eds K. B. Lipkowitz, R. Larter and T. R. Cundari), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA. doi: 10.1002/0471720895.ch1

[51] Y.I.Ozhigov, Distributed synthesis of chains with one-way biphotonic control, Quantum Information and Computation, vol. 18, 7-8, pp. 0592-0598.

[52] Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк (1955). «К теории умножения причинных сингулярных функций». ДАН СССР 100: 25.

[53] S. Hameroff; R. Penrose, "Consciousness in the universe: A review of the 'Orch OR' theory". Physics of Life Reviews, 2014, 11 (1): 51–53.

[54] Ф.Маттук, Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел, М., Мир, 1974.

[55] V. P. Maslov, "Rotation of a Neutron in the Coat of Helium-5 as a Classical Particle for a Relatively Large Value of the Hidden Parameter t meas ", Math. Notes, 103:1 (2018), 67–74.

[56] В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин, Параллельные вычисления, БХВ-Петербург, 2002. — 608 с. ISBN 5-94157-160-7.

[57] Limits to Parallel Computation: P-Completeness Theory, R. Greenlaw, H. J. Hoover, W. L. Ruzzo, Oxford University Press, 1995, pp. 336.

[58] А.С.Холево, Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи, Пробл. передачи информ., 1973, том 9, выпуск 3, страницы 3–11.

[59] А.А.Марков младший, О непрерывности конструктивных функций, Успехи мат. наук, 1954, 9, N 3 (61), стр. 226-229.

[60] G.S.Tseitin, Algorithmic operators in the constructive metric spaces, Doklady Academii Nauk USSR (rus), 1959, 128, N 1, pp.49-52.