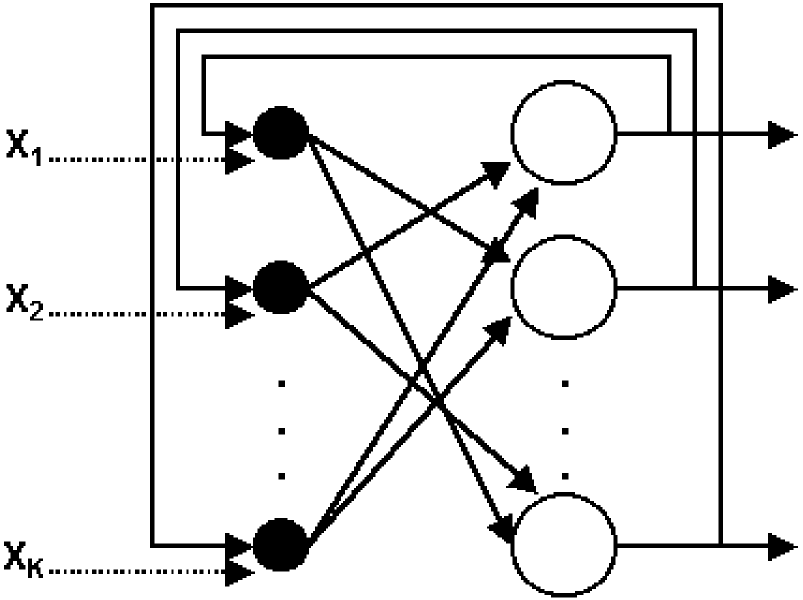
Лекция 8
Рекуррентные сети

Буряк Д.Ю.
к.ф.-м.н
dyb04@yandex.ru

Содержание

- Ассоциативная память
  - Ассоциативная память: сеть Хопфилда.
  - Гетероассоциативная память: сеть Хемминга.
- Рекуррентные сети на базе персептрона
  - Recurrent MultiLayer Perceptron
  - Рекуррентная сеть Эльмана
- Рекуррентные сети LSTM, GRU.

Сеть Хопфилда



$$y_i(n) = f\Big(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{K} w_{ji} y_j(n-1)\Big)$$

$$y_i(0) = x_i$$

Условие окончания: $y_i(n) = y_i(n-1)$

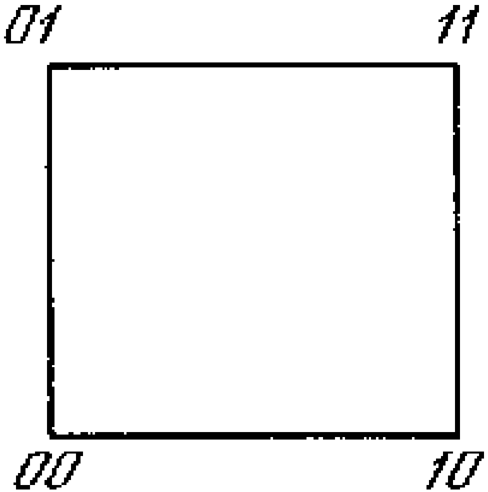
Достаточное условие устойчивости:

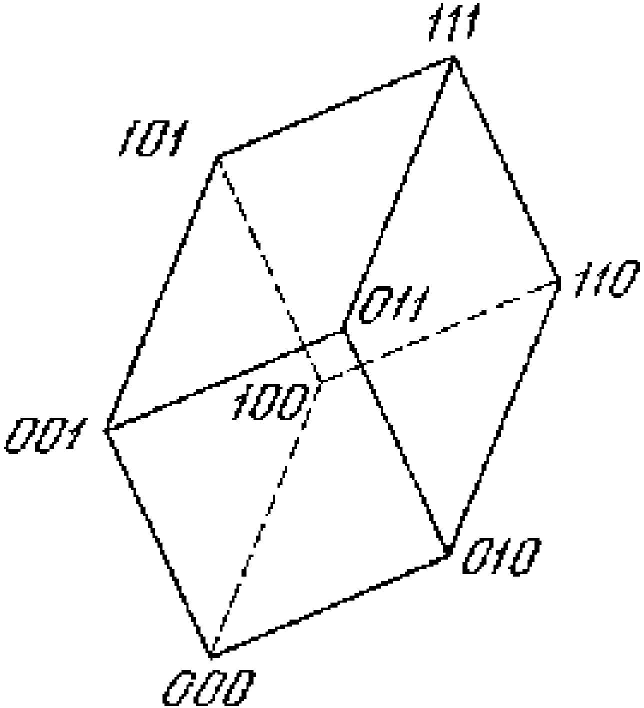
$$w_{ij} = w_{ji}$$

$$w_{ii} = 0$$

Бинарные системы

$$y_i = f(u_i) = \begin{cases} 1, u_i > 0 \\ -1, u_i \le 0 \end{cases} \qquad u_i = \sum_{j=1}^{K} w_{ji} z_j$$





Обучение методом проекций

$WX = X$

W - матрица весов *K*K*;
X - матрица *K*P*, составленная из обучающих векторов.

$W = XX^{+}$

$$W = X(X^T X)^{-1} X^T$$

$$W^{(i)} = W^{(i-1)} + \frac{1}{[x^{(i)}]^T x^{(i)} - [x^{(i)}]^T W^{(i-1)} x^{(i)}} \times [W^{(i-1)} x^{(i)} - x^{(i)}] \times$$
$$\times [W^{(i-1)} x^{(i)} - x^{(i)}]^T$$

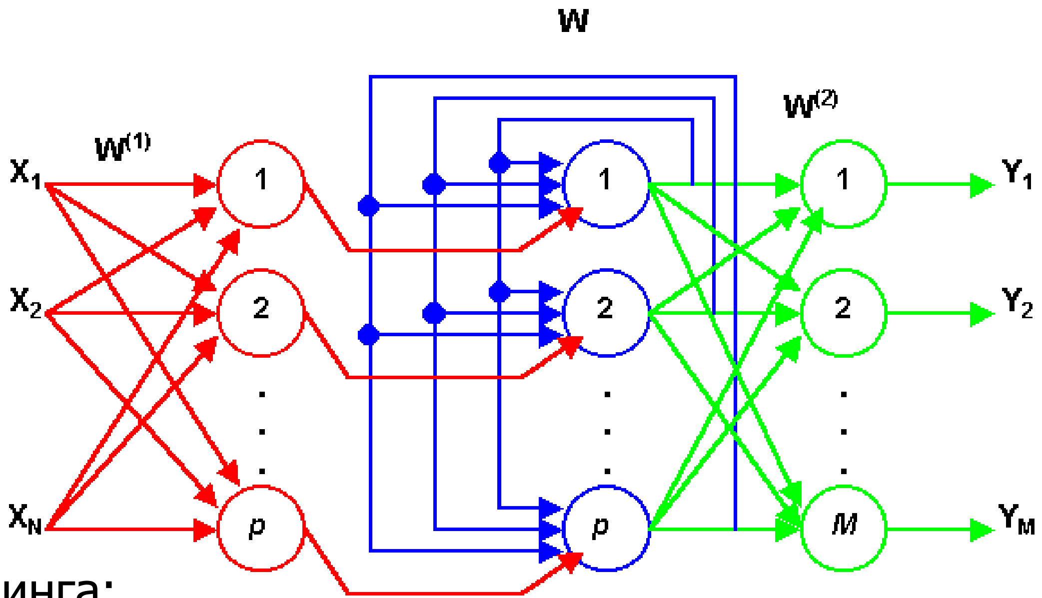
$x^{(i)}$ - обучающий вектор;
$W^{(0)}=0$;

Емкость сети Хопфилда: *K-1*

Сеть Хопфилда. Области применения

1. Ассоциативная память.
2. Распознавание образов.
3. Задачи оптимизации
   - Задача коммивояжера
   - Составление расписания
   - Аналого-цифровое преобразование
   - другие NP-полные проблемы
4. Математика
   - инвертирование матрицы
   - решение систем линейных и нелинейных уравнений

Сеть Хемминга



Расстояние Хемминга:

Двоичные вектора: $d_H(y,d) = \sum_{i=1}^{n} [d_i(1-y_i) + (1-d_i)y_i]$

Биполярные вектора: $d_H(y,d) = \frac{1}{2}\left[n - \sum_{i=1}^{n} y_i d_i\right]$

Сеть Хемминга. Вычисление.

Обрабатываемые данные: биполярные вектора.

Входной вектор: x

1. Вычисление расстояния Хемминга между входным вектором и образцами, закодированными в весах первого слоя.

$$y'_i = 1 - \frac{d_H(x^{(i)}, x)}{N}$$

2. Выбор образца с наименьшим расстоянием (сеть MAXNET).

$$y_j(k) = f\left(\sum_i w_{ij} y_i(k-1)\right) = f\left(y_j(k-1) + \sum_{i \neq j} w_{ij} y_i(k-1)\right)$$

$$y_j(0) = y'_j$$

3. Формирование выходного вектора, соответствующего входному вектору.

$$f(y) = \begin{cases} y, y \geq 0 \\ 0, y < 0 \end{cases}$$

Сеть Хемминга. Обучение

Обучающая выборка: $\{(x^{(j)}, y^{(j)})\}$ $j=1,2,\ldots,p$.

Слой 1: $w_{ij}^{(1)} = x_i^{(j)}$

Слой MAXNET: $w_{ii} = 1$

$$-\frac{1}{p-1} < w_{ij} < 0$$

$$w_{ij} = -\frac{1}{p-1} + \xi$$

Выходной слой: $w_{ij}^{(2)} = y_i^{(j)}$

Сеть Хемминга. Особенности

- Емкость сети: *P* (количество нейронов первого слоя).

- Достоинства:

1. Простой алгоритм работы.
2. Простой алгоритм обучения.
3. Емкость не зависит от размерности входного сигнала.

- Недостатки:

1. Неопределенность результата, при одинаковом расстоянии до двух и более векторов.
2. Способность распознавать только слабозашумленные образы.
3. Бинарные (биполярные) входные вектора.

Сравнение сетей Хопфилда и Хемминга

Задача кластеризации.
Вход: 100.
Количество кластеров: 10.

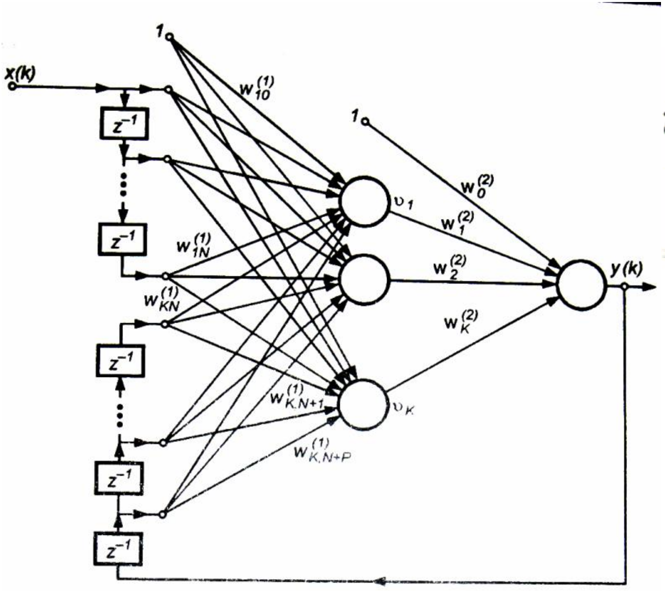
Количество связей:

Хопфилд: 100*100=10000;
Хемминг: 1000+100=1100.

Персептронная сеть RMLP

RMLP – Recurrent MultiLayer Perceptron

NARX - Non-linear Auto-Regressive with eXogeneous inputs



$$u_i = \sum_{j=0}^{N+P} w_{ij}^{(1)} x_j \qquad g = \sum_{i=0}^{K} w_i^{(2)} f(u_i)$$

$$v_i = f(u_i) \qquad y = f(g) .$$

<u>Случай одного входного и выходного нейронов</u>

y(k)=f(x(k),x(k-1),…,x(k-(N-1)),y(k-1),…,y(k-P))

N-1 – количество задержек входного сигнала

P – количество задержек выходного сигнала

<u>Применение.</u> Моделирование динамических систем.
Прогнозирование

RMLP: алгоритм обучения

BPTT – Backpropagation Through Time

Метод наискорейшего спуска, online режим

Функция ошибки (один выход):

$$E(k)=\frac{1}{2}[y(k)-d(k)]^2$$

1. Случайная инициализация весов
2. Для момента времени *t* и входного вектора *x(t)* вычислить состояния всех нейронов сети

$$u_i=\sum_{i=0}^{N+P} w_{ij}^{(1)}x_j \qquad g=\sum_{i=0}^{K} w_i^{(2)} f(u_i)$$

$$v_i=f(u_i) \qquad y=f(g).$$

3. Вычислить значения производных

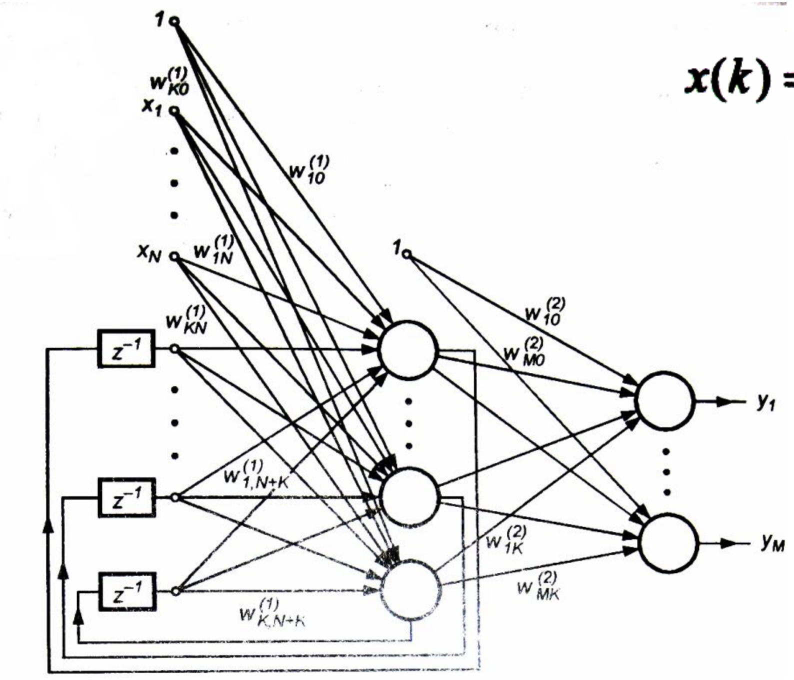
$$\frac{dy(k)}{dw_{\alpha,\beta}^{(1)}}=\frac{df(g(k))}{dg(k)}\sum_{i=1}^{K} w_i^{(2)}\frac{df(u_i(k))}{du_i^{(k)}}\left[\sum_{j=1}^{P} w_{i,j+N}^{(1)}\frac{dy(k-P-1+j)}{dw_\alpha^{(2)}}+\delta_{i\alpha}x_\beta\right]$$

$$\frac{dy(k)}{dw_\alpha^{(2)}}=\frac{df(g(k))}{dg(k)}\left[v_\alpha(k)+\sum_{i=0}^{K} w_i^{(2)}\frac{df(u_i(k))}{du_i^{(k)}}\sum_{j=1}^{P} w_{i,j+N}^{(1)}\frac{dy(k-P-1+j)}{dw_\alpha^{(2)}}\right].$$

4. Изменить веса
5. Перейти на шаг 2.

$$\Delta w_\alpha^{(2)}=-\eta[y(k)-d(k)]\frac{dy(k)}{dw_\alpha^{(2)}} \qquad \Delta w_{\alpha\beta}^{(1)}=-\eta[y(k)-d(k)]\frac{dy(k)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}}$$

Рекуррентная сеть Эльмана



$$x(k) = [x_0(k), x_1(k), \dots, x_N(k), v_1(k-1), v_2(k-1), \dots, v_K(k-1)]$$

$$u_i(k) = \sum_{j=0}^{N+K} w_{ij}^{(1)} x_j(k) \qquad v_i(k) = f_1(u_i(k))$$

$$g_i(k) = \sum_{j=0}^{K} w_{ij}^{(2)} v_j(k) \qquad y_i(k) = f_2(g_i(k))$$

<u>Применение.</u>

- Анализ естественного языка: классификация слов в тексте с учетом контекста.
- Прогнозирование: предсказание траффика

RTRN – Real Time Recurrent Network – частный случай сети Эльмана

Сеть Эльмана. Обучение

Метод наискорейшего спуска, online режим

Функция ошибки: $$E(k) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}[y_i(k) - d_i(k)]^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} e_i(k)^2$$

1. Случайная инициализация весов, равномерное из [-1,1]
2. Для момента времени *t* сформировать входной вектор *x(t)*
3. Вычислить вектор градиента
4. Изменить веса

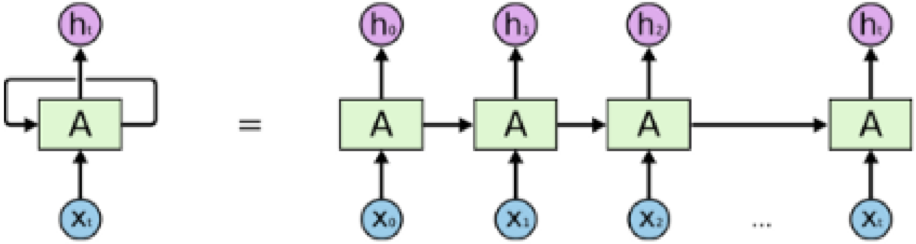
$$w_{\alpha,\beta}^{(2)}(k) = w_{\alpha,\beta}^{(2)}(k-1) - \eta \nabla_{\alpha,\beta}^{(2)} E(k)$$

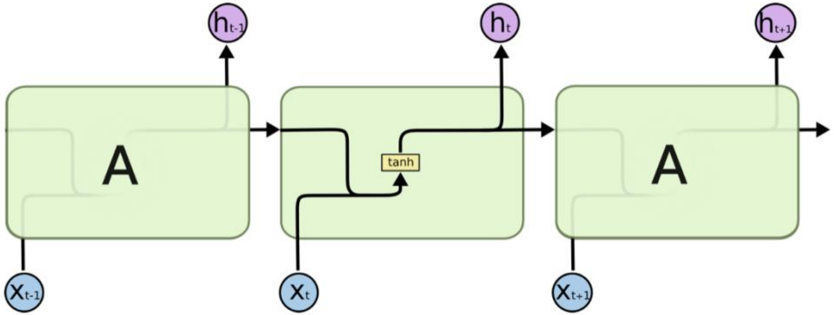
$$w_{\alpha,\beta}^{(1)}(k) = w_{\alpha,\beta}^{(1)}(k-1) - \eta \nabla_{\alpha,\beta}^{(1)} E(k)$$

5. Перейти на шаг 2.

Современные рекуррентные НС

- Обратная связь → «запоминание» информации

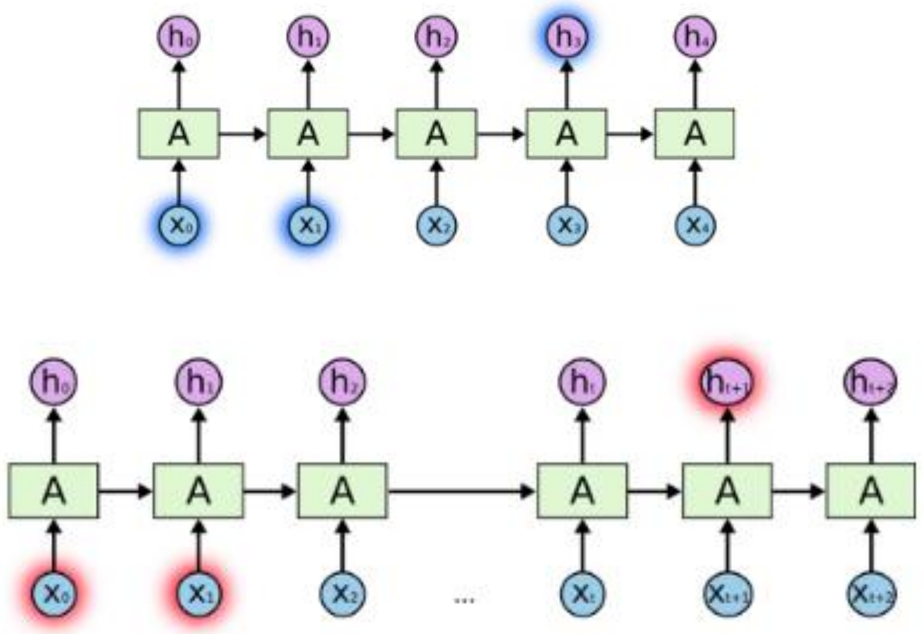




$$h_t = \tanh(W_{hh}h_{t-1} + W_{xh}x_t).$$

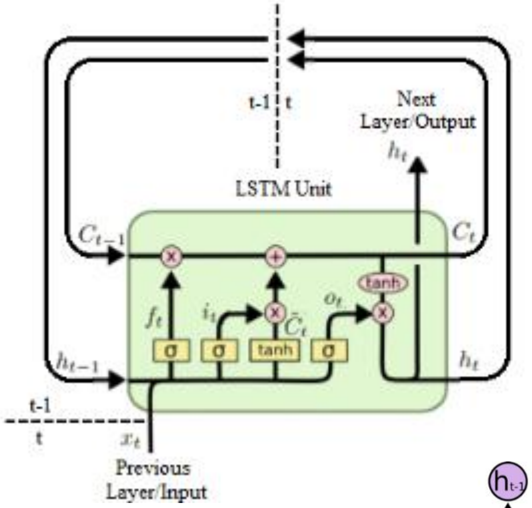
Краткосрочная память

- Короткий интервал «запоминания» информации

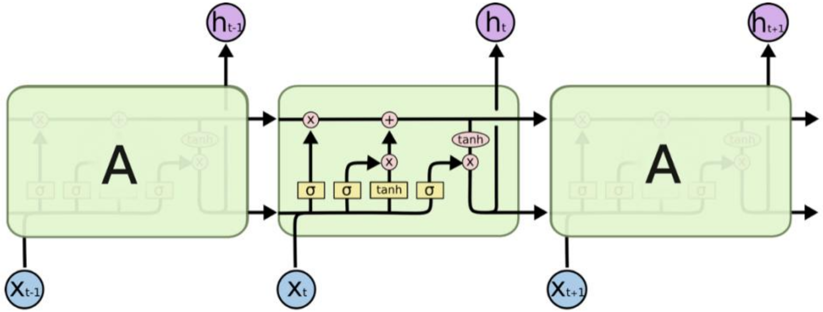


LSTM

- Long Short Term Memory – «запоминание» долгосрочных зависимостей.

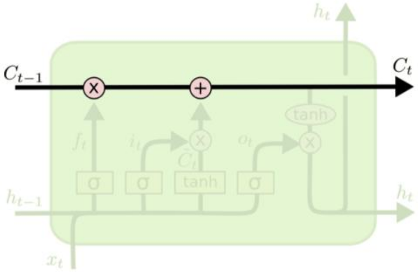


$$f_t = \sigma\left(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_f\right)$$
$$i_t = \sigma\left(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_i\right)$$
$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_C)$$
$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t$$
$$o_t = \sigma\left(W_o \ [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_o\right)$$
$$h_t = o_t * \tanh\left(C_t\right)$$

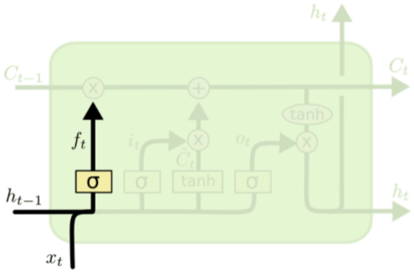


LSTM. Компоненты (1)

- Cell state - Состояние сети



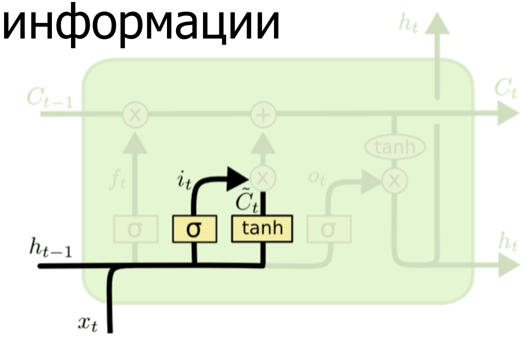
- Forget gate – контроль «забывания»



$$f_t = \sigma\left(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_f\right)$$

LSTM. Компоненты (2)

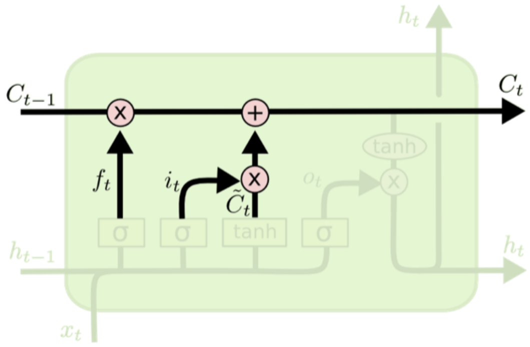
- Новая информация
- Input gate – добавление информации



$$i_t = \sigma\left(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] \;+\; b_i\right)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] \;+\; b_C)$$

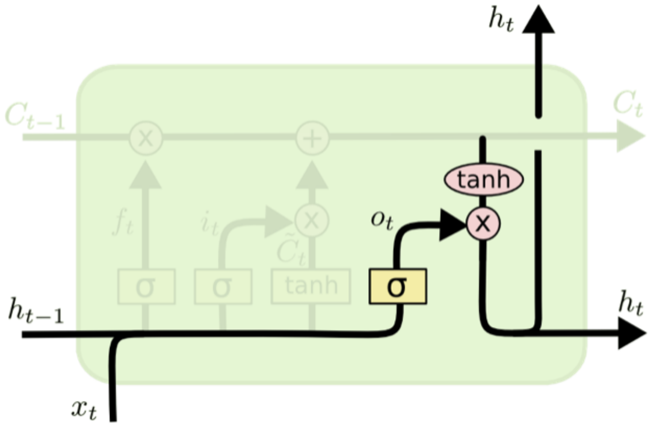
- Изменение состояния



$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t$$

LSTM. Компоненты (3)

- Выход сети

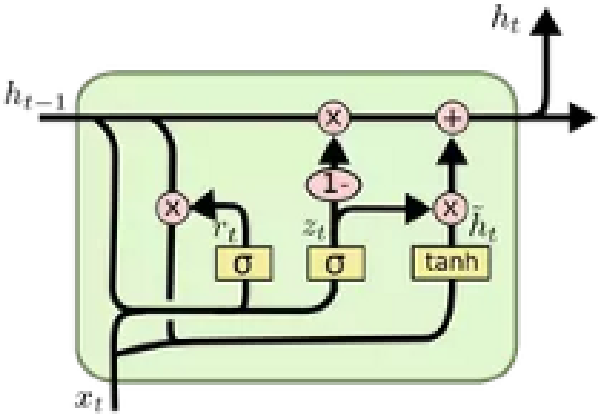


$$o_t = \sigma\left(W_o \left[h_{t-1}, x_t\right] + b_o\right)$$

$$h_t = o_t * \tanh\left(C_t\right)$$

GRU

- Gated Recurrent Unit.



$$z_t = \sigma\left(W_z \cdot [h_{t-1}, x_t]\right)$$

$$r_t = \sigma\left(W_r \cdot [h_{t-1}, x_t]\right)$$

$$\tilde{h}_t = \tanh\left(W \cdot [r_t * h_{t-1}, x_t]\right)$$

$$h_t = (1 - z_t) * h_{t-1} + z_t * \tilde{h}_t$$