

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский государственный гуманитарный университет»
(РГГУ)
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ БЕЗОПАСНОСТИ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И БЕЗОПАСНОСТИ

Кафедра фундаментальной и прикладной математики

Скурат Константин Николаевич

**ДИНАМИКА ВОЗБУЖДЕНИЯ ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
УРАВНЕНИЯ ЛИНДБЛАДА**

Выпускная квалификационная работа
студента 4 курса очной формы обучения

Направление подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»
(уровень – академический бакалавриат)

Допущена к защите в ГЭК:

Заведующий кафедрой:
д.пед.н., профессор

_____ В.К. Жаров
« » июня 2018 г.

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.

_____ Н.Б. Викторова
« » июня 2018 г.

Работа защищена с оценкой _____
протокол заседания ГЭК от « » июня 2018 г., № _____

Секретарь ГЭК _____ В.В. Славова

Москва 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ОГЛАВЛЕНИЕ..... | 2 |
| ВВЕДЕНИЕ..... | 3 |
| ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ..... | 5 |
| 1.1 ВОЛНОВОЙ ВЕКТОР. КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ..... | 6 |
| 1.2. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА..... | 8 |
| 1.3. УРАВНЕНИЕ ЛИНДБЛАДА..... | 9 |
| 1.4. МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА-КАММИНГСА..... | 10 |
| ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ..... | 12 |
| 2.1. МОДЕЛЬ С ФОТОНОМ..... | 12 |
| 2.1.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ..... | 12 |
| 2.1.2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ..... | 15 |
| 2.2. МОДЕЛЬ С АТОМОМ И ФОТОНОМ..... | 19 |
| 2.2.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ..... | 19 |
| 2.2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРИ $\gamma = 0$ | 23 |
| 2.2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРИ $\gamma \neq 0$ | 27 |
| 2.2.3.1 СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ($\gamma < 4g$)..... | 30 |
| 2.2.3.2 СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ($\gamma = 4g$)..... | 35 |
| 2.2.3.3 СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ НЕКРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ($\gamma > 4g$)..... | 39 |
| 2.3 ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ..... | 44 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 57 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ..... | 59 |

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика – фундаментальная теория о взаимодействии света и вещества или электрического поля, являющаяся первой успешной квантовой теорией поля, объясняющей эффекты взаимодействия излучения с веществом (испускание, поглощение и рассеяние) [2]. Также она описывает электромагнитные взаимодействия между заряженными частицами. Эта теория важна в свете необъяснимости ряда проблем при использовании классической теории электродинамики, как, например, излучение и поглощение фотонов атомами и более сложными системами. Важным приложением квантовой электродинамики является проектирование элементов для квантовых компьютеров [4].

В приложениях квантовой электродинамики важную роль играют оптические системы. Одной из таких систем является модель Джейнса-Каммингса (Э.Джейнс, Ф.Каммингс, 1963; далее JCM) – теоретическая модель в квантовой оптике. Эта модель описывает систему двухуровневого атома, взаимодействующего с квантовыми состояниями оптического резонатора, в присутствии или отсутствии электромагнитного излучения, которое может вызвать спонтанное излучение или поглощение. JCM – стандартная модель в нанoeлектронике для описания кубитов, взаимодействующих с монохроматическим электромагнитным полем.

В модели JCM можно проследить динамику взаимодействия атома и фотона во времени. Для исследования динамики используется уравнение Шредингера. В общем случае его вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle,$$

где $|\psi\rangle$ – волновой вектор, \hbar – постоянная Дирака ($\approx 1,055 \times 10^{-34}$ Дж·с),

H – оператор полной энергии системы (гамильтониан), являющийся эрмитовым оператором, он определяет квантовую эволюцию системы.

Уравнение Шредингера описывает унитарную эволюцию квантовых состояний, тогда как уравнение Линдблада для матрицы плотности ρ описывает неунитарную (необратимую) эволюцию системы. Оно получается из уравнения Шредингера для матрицы плотности с добавлением оператора декогерентности (отвечающего за контакт системы с внешней средой) $\mathcal{L}(\rho)$, домноженного на i .

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho),$$

где $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ - плотность, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ коммутатор.

В данной работе исследуется динамика возбуждения поля в квантовых моделях на базе JCM с:

- единственным фотоном без атомов;
- одним атомом и фотоном.

Модель состоит из оптической полости (резонатора), в котором изначально находится фотон (атом в возбужденном состоянии, испускающий фотон) и стока, в который фотон через некоторое время вылетает.

Цель работы – определить динамику вероятностей нахождения фотона в полости (во втором случае – нахождения фотона в полости с атомом в основном и возбужденном состоянии) в описанных выше моделях при помощи уравнения Линдблада (отдельно рассмотрен случай $\mathcal{L}(\rho) = 0$ и как вероятности ведут себя в данном случае), рассмотреть графики вероятностей при разных значениях параметров, выявить их поведение с течением времени.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Важнейшим постулатом квантовой механики является то, что динамика квантовой системы определяется ее волновой функцией, которая является комплексной функцией от координат всех частиц, составляющих эту систему:

$$\psi(t, r_1, r_2, \dots, r_n)$$

где r_j – координаты частицы j . Эту волновую функцию будет рассматриваться как вектор в гильбертовом пространстве состояний n -частичной системы. Значения этой функции называются амплитудами, соответствующими пребыванию частицы в данный момент времени t в таком состоянии, при котором для каждого $j=1, 2, \dots, n$ частица j имеет координаты r_j .

Основополагающим правилом квантовой механики является правило Борна, которое гласит, что квадрат модуля волновой функции есть плотность вероятности обнаружения в точке x :

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2$$

Оно утверждает, что мы можем предсказать только вероятности наступления того или иного события, но не сами эти события[3].

1.1 ВОЛНОВОЙ ВЕКТОР. КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ – конечномерное гильбертово пространство. Будем обозначать вектора в \mathcal{H} , используя обозначения Дирака, как $|\psi\rangle$ («кет-вектор»), а соответствующий вектор из сопряженного пространства \mathcal{H}^* как $\langle\psi|$ («бра-вектор»). Если обозначить координаты $|\psi\rangle$ через $\psi_i \in \mathbb{C}$, то

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Тогда $\langle\psi| = (\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_N}) \in \mathcal{H}^*$.

Скалярное произведение $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ и $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ записывается в виде

$$\langle\psi||\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle = (\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_N}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \overline{\psi_i} \varphi_i.$$

Длина вектора определяется по формуле $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$

Будем рассматривать вектора $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, у которых длина равна единице.

Такие нормированные векторы называются *квантовым состоянием* $|\psi\rangle$

(*волновым вектором*)[9]. Канонический (естественный) базис задается векторами

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда любой волновой вектор $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ может быть представлен в виде нормированной линейной комбинации базисных векторов:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |e_i\rangle, c_i \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^N |c_i|^2 = 1,$$

где c_i – амплитуда пребывания квантовой системы в базисном состоянии $|e_i\rangle$.

Введем некоторые определения из линейной алгебры применительно к волновым векторам[1].

Опр. 1 *Линейным оператором* в пространстве \mathcal{H} называется всякое отображение $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, обладающее свойствами, что для любых $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$A(|\psi\rangle + |\varphi\rangle) = A|\psi\rangle + A|\varphi\rangle;$$

$$A(\alpha|\psi\rangle) = \alpha A|\psi\rangle.$$

Опр. 2 Вектор $|\psi\rangle \neq 0$ называется *собственным вектором оператора* A , если $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, λ – соответствующее *собственное значение*.

Опр. 3 Линейный оператор A^* называется *сопряженным к* A , если для любых $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ имеет место: $\langle \psi|A\varphi\rangle = \langle A^*\psi|\varphi\rangle$.

Опр. 4 Оператор A называется *эрмитовым*, если $A = A^*$.

Собственные значения эрмитова оператора вещественны.

В любом ортонормированном базисе матрица $A = (a_{ij})$ эрмитова оператора удовлетворяет соотношению: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Пусть квантовая система находится в одном из квантовых состояний $|\psi_i\rangle$ с вероятностью p_i . Такую систему называют смесью чистых квантовых состояний.

Опр.5[3] *Матрицей (или оператором) плотности* такой смеси называют:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (6)$$

В отличие от волновой функции, пригодной лишь для описания чистых состояний, оператор плотности в равной мере может задавать как чистые, так и смешанные состояния.

В пространстве квантовых состояний представлением двухуровневой квантовой системы является один кубит ($n=1$). В качестве базиса при описании кубита берется ортонормированный базис $|e_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|e_2\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, состояние кубита – это нормированная суперпозиция базисных состояний:

$$|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle, \text{ где } |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Базисные состояния пространства n кубитов имеют вид $|i_1 i_2 \dots i_n\rangle$, где $i_j \in 0,1$. Количество таких базисов $N = 2^n$.

В векторной записи они выглядят в таком виде:

$$|00 \dots 0\rangle = |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|00 \dots 1\rangle = |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

...

$$|11 \dots 1\rangle = |e_N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

где $N = 2^n$, n – количество кубитов.

Общий вид n -кубитного состояния имеет вид:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |i_1 i_2 \dots i_n\rangle, c_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^N |c_i|^2 = 1.$$

1.2. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Динамика квантовой системы описывается с помощью уравнения Шредингера. В общем случае оно имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (1)$$

где $|\psi\rangle$ – волновой вектор, определяющий состояние системы в момент времени t , \hbar – постоянная Дирака ($\approx 1,055 \times 10^{-34}$ Дж·с), H – оператор полной энергии системы (гамильтониан), он является эрмитовым.

Кроме того, нам понадобится уравнение Шредингера для матрицы

плотности, которое получается из общего сопряжением частей уравнения(1):

$$\langle \psi(t) | H = i\hbar \langle \dot{\psi}(t) |$$

$$\dot{\rho} = |\dot{\psi}\rangle \langle \psi| + |\psi\rangle \langle \dot{\psi}|$$

Выразив $|\dot{\psi}\rangle$, $\langle \dot{\psi}|$ и подставив в следующее уравнение, получим уравнение Шредингера для матрицы плотности

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [H, \rho], \quad (2)$$

где $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ - плотность, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ коммутатор.

1.3. УРАВНЕНИЕ ЛИНДБЛАДА

Уравнение Шредингера описывает унитарную эволюцию квантовых состояний, тогда как уравнение Линдблада для матрицы плотности ρ описывает неунитарную (необратимую) эволюцию системы. Оно получается из уравнения Шредингера для матрицы плотности с добавлением оператора декогерентности (отвечающего за контакт системы с внешней средой) $\mathcal{L}(\rho)$, домноженного на i . Динамика этой неунитарной квантовой системы описывается с помощью уравнения Линдблада. В общем случае оно имеет вид:

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho), \text{ где } \mathcal{L}(\rho) = \gamma(A\rho A^* - \frac{1}{2}\{\rho, A^*A\}) \quad (3)$$

Здесь A – это оператор Линдблада, A^* – сопряжённый ему оператор $\mathcal{L}(\rho)$ – оператор декогерентности, который описывает взаимодействие нашей системы с внешней средой, γ – интенсивность, ρ – матрица плотности системы, $\{A, B\} = AB + BA$ – антикоммутатор, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ – коммутатор, где H – оператор полной энергии системы (гамильтониан).

1.4. МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА-КАММИНГСА

Модель Джейнса-Каммингса (JCM)[8] описывает систему, состоящую из двухуровневого атома, взаимодействующего с квантовыми состояниями оптического резонатора, в присутствии или отсутствии электромагнитного излучения, которое может вызвать спонтанное излучение или поглощение (фотона).

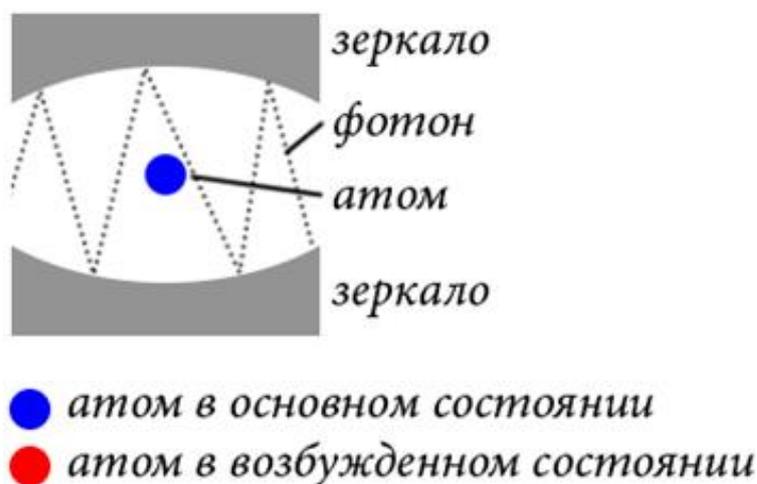


Рис.1. JCM-модель с одним атомом и фотоном

Энергия данной системы выражается с помощью гамильтониана

$H = H_{ph} + H_{at} + H_{int}$, в котором

$H_{ph} = \hbar\omega_{ph} a^+ a$ - энергия фотона

$H_{at} = \hbar\omega_{at} \sigma^+ \sigma$ - энергия атома

$H_{int} = g(a^+ + a)(\sigma^+ + \sigma)$ - энергия взаимодействия атома и фотона, где

a^+, a – операторы рождения и уничтожения фотона, действующие на состояние с n фотонами так:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$, a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \text{ если } n \neq 0, \text{ при } n = 0 \quad a|0\rangle = 0. \quad (4)$$

Тогда оператор $a^+ a$ соответствует количеству фотонов и действует на их состояния в виде $a^+ a|n\rangle = n|n\rangle$. Аналогично действуют и σ^+, σ – операторы возбуждения и уничтожения возбуждения атомов.

ω_{at}, ω_{ph} – частота перехода атома и частота полости (фотона), g – частота Раби, характеризующая взаимодействие атома с фотоном, \hbar – постоянная Дирака.

Исследования данной работы проводятся при условиях $\omega_{ph} = \omega_{at} = \omega$ и $\frac{g}{\omega} \ll 1$, такие условия называются приближением вращающейся волны (RWA). Это означает, что в гамильтониане не учитываются слагаемые, не сохраняющие энергию $a^+ \sigma^+$ и $a \sigma$. В таком случае гамильтониан системы в RWA-приближении выглядит как

$$H = \hbar\omega a^+ a + \hbar\omega \sigma^+ \sigma + g(a^+ \sigma + a \sigma^+) \quad (5)$$

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ

2.1. МОДЕЛЬ С ФОТОНОМ

2.1.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается модель на базе JCM – есть оптическая полость (резонатор), состоящая из двух вогнутых зеркал, без атомов, из которой вылетает единственный фотон (рис.1).

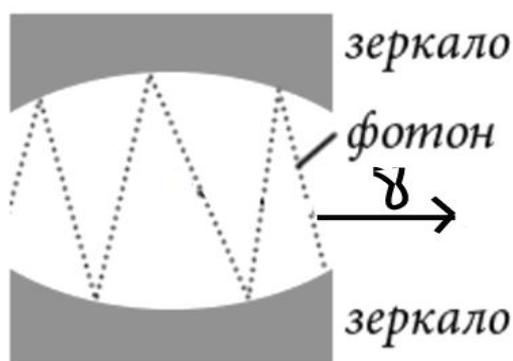


Рис.2. Устройство оптического резонатора

Динамика этой неунитарной квантовой системы описывается с помощью уравнения Линдблада. В общем случае оно имеет вид:

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho), \text{ где } \mathcal{L}(\rho) = \gamma(A\rho A^* - \frac{1}{2}\{\rho, A^*A\})$$

Здесь A – оператор Линдблада, в нашем случае берём в качестве него оператор уничтожения (a), в качестве сопряжённого ему – оператор рождения (a^+) фотона в полости, $\mathcal{L}(\rho)$ – оператор декогерентности, который описывает взаимодействие нашей системы с внешней средой, γ – интенсивность ($\gamma \neq 0$, так как иначе получается случай, где фотон всё время резонирует в полости без воздействия других факторов), ρ – матрица плотности(б), $\{A, B\} = AB + BA$ – антикоммутатор, $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ – коммутатор, где H – оператор полной

энергии системы (гамильтониан).

$H = H_{ph} + H_{at} + H_{int}$, где в нашем случае

$H_{ph} = \hbar\omega a^+ a$ – энергия фотона

H_{at} – энергия атома,

H_{int} – энергия взаимодействия между атомом и фотоном.

$H_{at} = H_{int} = 0$, так как в нашей модели атомов нет, отсюда $H = \hbar\omega a^+ a$.

Имеем однокубитную систему ($|ph\rangle$), в которой единственный кубит зависит от фотона, который либо есть в такой системе, либо его нет. Такая система имеет два базисных состояния: $|0\rangle, |1\rangle$. На рис.2,3 изображены оптические резонаторы в этих состояниях.

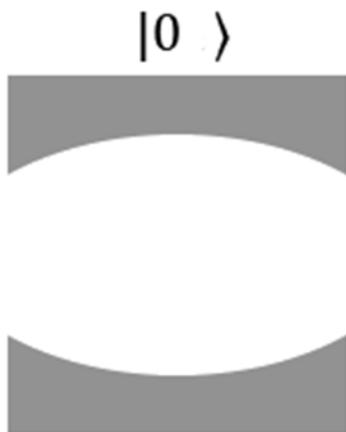


Рис.3. Фотон вылетел из резонатора

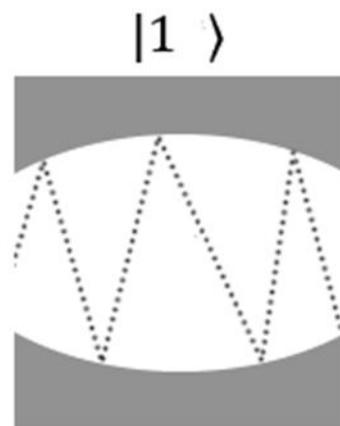


Рис.4. Фотон в резонаторе

Зададим базисные состояния модели векторно.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Операторы рождения и уничтожения в общем виде устроены так, что собственное значение оператора $a^+ a$ есть количество фотонов(4):

$$a^+ a |n\rangle = n |n\rangle$$

Тогда эти операторы действуют так:

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \text{ если } n \neq 0, \text{ при } n = 0 \ a |0\rangle = 0.$$

В нашем случае переменная n заменена на переменную ph , которая принимает значения 0 и 1.

Применяем оператор уничтожения фотона к базисным векторам $\begin{cases} a|0\rangle = 0 \\ a|1\rangle = |0\rangle \end{cases}$

получаем матрицу этого оператора $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично для оператора рождения фотона $\begin{cases} a^+|0\rangle = |1\rangle \\ a^+|1\rangle = 0 \end{cases}$

и его матрица: $a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Введем матрицу плотности $\rho(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ \overline{d(t)} & b(t) \end{pmatrix}$.

Функция $d(t)$ комплексная, поэтому $d = d_1 + id_2$.

Матрица плотности эрмитова. Поэтому элементы $a(t)$, $b(t)$ действительные. След матрицы равен 1, так как он является длиной волнового вектора (правило Борна).

$$\text{tr}(\rho(t)) = a(t) + b(t) = 1$$

Тогда $b(t)$ означает соответственно населенность резонатора (т.е. с какой вероятностью там есть фотон), $a(t)$ – вероятность отсутствия там фотона. Нас будет интересовать динамика населенности резонатора и изменение матрицы плотности. В начальный момент времени фотон находится внутри резонатора, соответственно $a(0) = 0, b(0) = 1$.

2.1.2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ

Для описания изменения квантового состояния во времени нашей неунитарной системы используется уравнение Линдблада, о котором говорилось выше, в терминах нашей системы оно имеет вид:

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho), \text{ где } \mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(a\rho a^+ - \frac{1}{2}\{\rho, a^+a\} \right).$$

Далее находим все слагаемые данного уравнения и переходим от матричной формы к системе дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями – задаче Коши.

$$H = \hbar\omega a^+a = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega \end{pmatrix}$$

Коммутатор имеет вид:

$$[H, \rho] = H\rho - \rho H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ \bar{d} & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & d \\ \bar{d} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar d\omega \\ \bar{d}\hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(a\rho a^+ - \frac{1}{2}\{\rho, a^+a\} \right) - \text{оператор внешней среды}$$

$$a\rho a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ \bar{d} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{\rho, a^+a\} &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a & d \\ \bar{d} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ \bar{d} & b \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{d} & b \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & d/2 \\ \bar{d}/2 & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & d/2 \\ \bar{d}/2 & b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \gamma b & -\gamma d/2 \\ -\gamma \bar{d}/2 & -\gamma b \end{pmatrix}$$

$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho)$, подставив слагаемые в исходное уравнение, получаем

$$i\hbar\dot{\rho} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} \\ i\hbar\dot{\bar{d}} & i\hbar\dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar d\omega \\ \hbar \bar{d}\omega & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \gamma a & -\frac{\gamma d}{2} \\ -\frac{\gamma \bar{d}}{2} & -\gamma b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} \\ i\hbar\dot{\bar{d}} & i\hbar\dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma bi & d(-\frac{\gamma i}{2} - \hbar\omega) \\ \bar{d}(\hbar\omega - \frac{\gamma i}{2}) & -\gamma bi \end{pmatrix}$$

Так как элемент матрицы $d(t)$ является комплексным, т.е.

$$d = d_1 + id_2; \bar{d} = d_1 - id_2.$$

Введем начальные условия $a(0) = 0, b(0) = 1, d_1(0) = 0, d_2(0) = 0$.

И переходим к задаче Коши.

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\gamma}{\hbar} b \\ \dot{b} = -\frac{\gamma}{\hbar} b \\ \dot{d}_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar} d_1 - \omega d_2 \\ \dot{d}_2 = \omega d_1 - \frac{\gamma}{2\hbar} d_2 \\ a(0) = 0 \\ b(0) = 1 \\ d_1(0) = 0 \\ d_2(0) = 0 \end{cases}$$

Решая отдельно системы из первого и второго уравнений получаем из $\dot{b} = -\frac{\gamma}{\hbar} b$ $b(t) = C_2 e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}}$, так как это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными первого порядка[7], подставим решение в $\dot{a} = \frac{\gamma}{\hbar} b$, получим $a(t) = C_1 - C_2 e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}}$. Из системы третьего и четвертого уравнений, являющейся линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами[7], характеристический многочлен равен $\det(A - \lambda E) = \left(\lambda + \frac{\gamma}{2\hbar}\right)^2 + \omega^2 = 0$, откуда находим $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm i\omega$.

Отсюда получаем собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, поэтому $d_1(t) = \operatorname{Re} \left(e^{t(-i\omega - \frac{\gamma}{2\hbar})} \right) + \operatorname{Im} \left(e^{t(-i\omega - \frac{\gamma}{2\hbar})} \right), d_2(t) = \operatorname{Re} \left(-ie^{t(-i\omega - \frac{\gamma}{2\hbar})} \right) + \operatorname{Im} \left(- \right)$

$$ie^{t(-i\omega - \frac{\gamma}{2\hbar})}.$$

Получено общее решение:

$$\begin{cases} a(t) = C_1 - C_2 e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} \\ b(t) = C_2 e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} \\ d_1(t) = (-C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ d_2(t) = (C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \end{cases}$$

Откуда, зная, что $b(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$; $a(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 1$;

$$d_1(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0; d_2(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0.$$

Так как $C_3 = 0$; $C_4 = 0$, то и $d_1(t) = 0$, $d_2(t) = 0$.

Получено частное решение:

$$\begin{cases} a(t) = 1 - e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} \\ b(t) = e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} \\ d_1(t) = 0 \\ d_2(t) = 0 \end{cases}$$

И искомая матрица плотности имеет вид

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

Далее смотрим, как полученные вероятности населённости резонатора $a(t), b(t)$ выглядят в динамике при различных значениях параметра интенсивности γ .

```
Plot[{a[t] = 1 - e^-t, b[t] = e^-t}, {t, 0, 5}, PlotStyle -> {{Green}, {Dashing[Large]}},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"}, PlotLegends -> "Expressions", ImageSize -> 500]
```

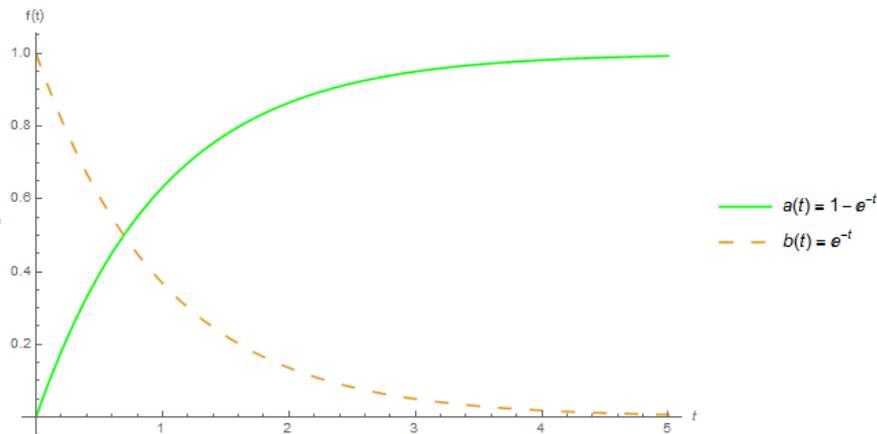


Рис.5. График зависимости $a(t)$, $b(t)$ при $\gamma = \hbar$.

```
In[35]= Plot[{a1[t] = 1 - e^-t, a2[t] = 1 - e^-3t, a3[t] = 1 - e^-t/3, b1[t] = e^-t, b2[t] = e^-3t, b3[t] = e^-t/3},
  {t, 0, 10}, PlotStyle -> Thickness[0.01], AxesLabel -> {x, "f(x)"}, PlotLegends -> "Expressions"]
```

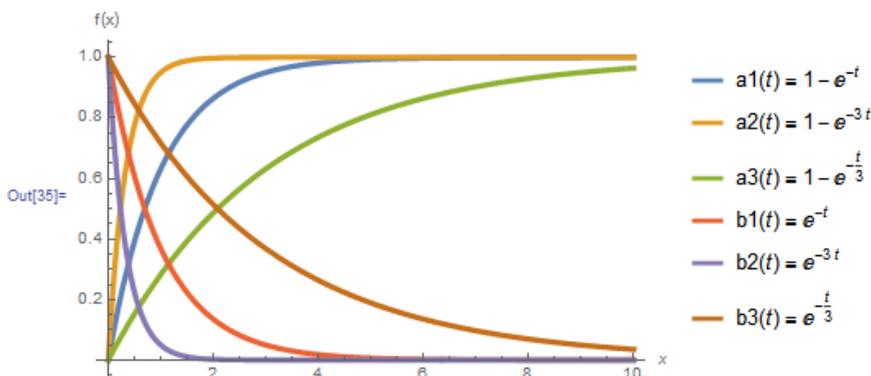


Рис.6. График зависимости $a(t)$, $b(t)$ при $\gamma = \hbar; 3\hbar; \hbar/3$.

В итоге была найдена искомая матрица плотности $\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma t}{\hbar}} \end{pmatrix}$

и зависимости вероятности населенности резонатора и отсутствия фотона от времени при помощи использования уравнения Линдблада в модели с единственным фотоном без атомов. Вероятности $a(t)$, $b(t)$ получились распределенными экспоненциально. В Wolfram Mathematica 10.0 построены графики зависимости этих вероятностей от времени при $\gamma = \frac{\hbar}{3}; \hbar; 3\hbar$ (рис. 4,5). На них показано, что в нулевой момент времени $a(t)=0$, $b(t)=1$, затем по мере вылета фотона из резонатора происходит перераспределение вероятностей, и в пределе при $t \rightarrow \infty$ внешняя вероятность $a(t) = 1$, а внутренняя $b(t) = 0$.

2.2. МОДЕЛЬ С АТОМОМ И ФОТОНОМ

2.2.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается модель Джейнса-Каммингса с одним атомом и фотоном. Происходит утечка фотона из полости (оптического резонатора). Атом может находиться в возбужденном и основном состоянии. Рассматривается динамика вероятности нахождения фотона в полости при помощи уравнения Линдблада(3).

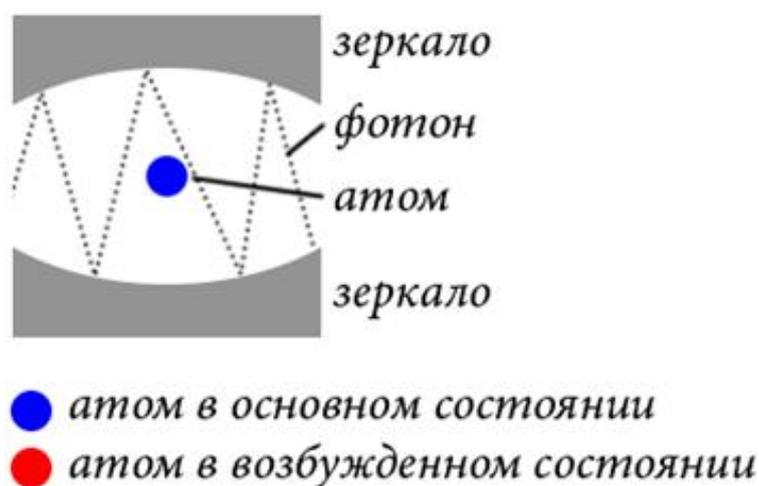


Рис.7. Устройство оптического резонатора с одним атомом и фотоном

Имеем двухкубитную систему ($|ph, at\rangle$), в которой за состояние атома отвечает правый кубит, а за состояние фотона – левый:

- атом в такой модели может находиться в основном состоянии и в возбужденном состоянии;
- фотон либо есть в такой системе, либо его нет.

Такая система имеет 3 базисных состояния: $|01\rangle, |10\rangle, |00\rangle$. На рис.8-10 изображены оптические резонаторы в данных состояниях.

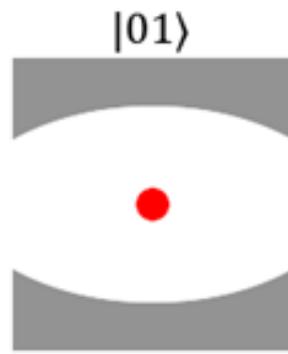


Рис.8. $|01\rangle$ - атом в возбуждённом состоянии, т.е. он поглотил фотон

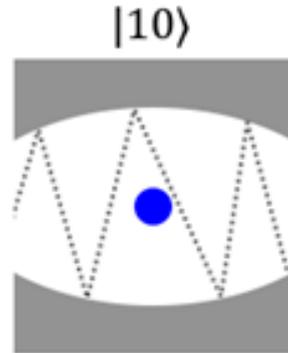


Рис.9. $|10\rangle$ - атом в основном состоянии, фотон в полости

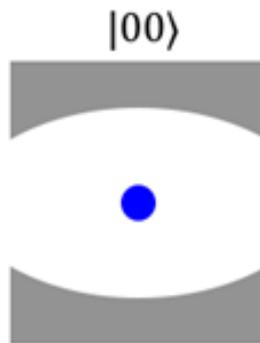


Рис.10. $|00\rangle$ - атом в основном состоянии, фотона вылетел.

Зададим базисные состояния модели векторно.

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |00\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Договоримся считать, что в начальный момент времени $t=0$ атом находится с вероятностью 1 в состоянии возбуждения, т.е. вся система находится в базисном состоянии $|01\rangle$. Поэтому матрица плотности(6) системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \sum_{i=1}^3 p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = 0 * |10\rangle\langle 10| + 1 * |01\rangle\langle 01| + 0 * |00\rangle\langle 00| = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad 1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Операторы рождения и уничтожения в общем виде устроены так, что собственное значение оператора a^+a есть количество фотонов(4):

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle$$

Тогда эти операторы действуют так:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Аналогично действуют операторы возбуждения и уничтожения возбуждения атома σ^+, σ^- в однокубитной системе при $n = 0, 1$.

Опишем все ситуации, происходящие с системой.

1) Применяем оператор уничтожения фотона к первому кубиту (который отвечает за фотон) и получаем матрицу a этого оператора

$$\begin{cases} a|10\rangle = |00\rangle \\ a|01\rangle = 0 \\ a|00\rangle = 0 \end{cases} \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Аналогично для оператора рождения фотона с матрицей a^+

$$\begin{cases} a^+|10\rangle = 0 \\ a^+|01\rangle = 0 \\ a^+|00\rangle = |10\rangle \end{cases} \quad a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также могут происходить процессы:

3) Атом переходит из возбужденного состояния в основное. За это отвечает оператор уничтожения возбуждения σ (применяется ко второму кубиту, отвечающему за атом). Получаем матрицу данного оператора.

$$\begin{cases} \sigma|10\rangle = 0 \\ \sigma|01\rangle = |00\rangle \\ \sigma|00\rangle = 0 \end{cases} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Атом переходит из спокойного состояния в возбужденное. За это отвечает оператор возбуждения σ^+ .

$$\begin{cases} \sigma^+|10\rangle = 0 \\ \sigma^+|01\rangle = 0 \\ \sigma^+|00\rangle = |01\rangle \end{cases} \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение Линдблада для матрицы плотности ρ :

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho), \text{ где } \mathcal{L}(\rho) = \gamma(A\rho A^* - \frac{1}{2}\{\rho, A^*A\})$$

$$\text{Матрица } \rho(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) & f(t) \\ \overline{d(t)} & b(t) & e(t) \\ \overline{f(t)} & \overline{e(t)} & c(t) \end{pmatrix}, \text{ где(7)} \quad \rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она является эрмитовой, т.е. эл-ты $a(t), b(t), c(t) \in R$, где (t) – динамика населенности резонатора, $b(t)$ – динамика вероятности возбуждения атома, $c(t)$ – динамика населённости стока. Кроме того, известно, что (правило Борна)

$$\text{tr}(\rho(t)) = a(t) + b(t) + c(t) = 1.$$

В данной матрице мы должны найти ее элементы. Будем считать, что $f(t) = e(t) = 0$. Тогда матрица имеет вид:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) & 0 \\ \overline{d(t)} & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{pmatrix}$$

Функция $d(t)$ является в общем случае комплексной, поэтому $d = d_1 + id_2$.

Оператор полной энергии (гамильтониан) системы(5):

$$H = H_{ph} + H_{at} + H_{int}, \text{ где}$$

$$H_{ph} = \hbar\omega a^+a - \text{энергия фотона}$$

$$H_{at} = \hbar\omega \sigma^+\sigma - \text{энергия атома}$$

$$H_{int} = g(a^+\sigma + a\sigma^+) - \text{энергия взаимодействия атома и фотона}$$

ω – частота атома (фотона), g – частота Раби, характеризующая взаимодействие атома с фотоном, σ^+, σ – операторы возбуждения и уничтожения возбуждения атома, a^+, a – операторы рождения и уничтожения фотона, \hbar - постоянная Дирака

$$H = \hbar\omega a^+a + \hbar\omega \sigma^+\sigma + g(a^+\sigma + a\sigma^+)$$

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ g \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \hbar\omega & g & 0 \\ g & \hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[H, \rho] &= H\rho - \rho H = \begin{pmatrix} \hbar\omega & g & 0 \\ g & \hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ \bar{d} & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ \bar{d} & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar\omega & g & 0 \\ g & \hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} g(\bar{d} - d) & g(b - a) & 0 \\ g(a - b) & g(d - \bar{d}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b - a) & 0 \\ g(a - b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{L}(\rho) &= \gamma \left(a\rho a^+ - \frac{1}{2} \{\rho, a^+ a\} \right)
\end{aligned}$$

Возможны случаи $\gamma = 0$, когда взаимодействия между внешней средой и резонатором не происходит и, соответственно, $\mathcal{L}(\rho) = 0$ и $\gamma \neq 0$. Рассмотрим их ниже подробно.

2.2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРИ $\gamma = 0$

Рассмотрим случай $\gamma = 0$. Исходя из этого, в уравнении Линдблада(3) обнулится второе слагаемое и получится уравнение Шредингера для матрицы плотности $i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho]$. Решим его.

$$i\hbar\dot{\rho} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} & 0 \\ i\hbar\dot{\bar{d}} & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b - a) & 0 \\ g(a - b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем систему уравнений с учётом, что

$$d \in \mathbb{C}, d = d_1 + id_2; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{2g}{\hbar} d_2 \\ \dot{b} = \frac{2g}{\hbar} d_2 \\ \dot{d}_1 = 0 \\ \dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar} a - \frac{g}{\hbar} b \\ \dot{c} = 0 \end{cases}$$

Решаем систему с начальными условиями(7) $a(0) = 0, b(0) = 1, c(0) = 0, d_1(0) = 0, d_2(0) = 0$. Т.к. $\dot{d}_1 = \dot{c} = 0 \Rightarrow c(t) = C_4, d_1(t) = C_5, c(0) = 0, d_1(0) = 0$, откуда $c(t) = d_1(t) = 0$. Переходим к системе из трёх оставшихся уравнений с начальными условиями и решим получившуюся задачу Коши в виде:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{2g}{\hbar} d_2 \\ \dot{b} = \frac{2g}{\hbar} d_2 \\ \dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar} a - \frac{g}{\hbar} b \\ a(0) = 0 \\ b(0) = 1 \\ d_2(0) = 0 \end{cases}$$

Характеристический многочлен данной системы имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & -\lambda & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda^2 + \frac{4g^2}{\hbar^2} \right),$$

откуда находятся собственные значения $\lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = \pm \frac{2ig}{\hbar}$.

Ищем собственные вектора, соответствующие нашим собственным значениям λ :

1) $\lambda_1 = 0$.

$$(A - \lambda_1 E)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда собственный вектор примет вид: $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Общее решение: } C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \lambda_{2,3} = \pm \frac{2ig}{\hbar}.$$

Берём собственное значение $\lambda_2 = \pm \frac{2ig}{\hbar}$ и находим соответствующий ему собственный вектор:

$$(A - \lambda_2 E)x = \begin{pmatrix} -\frac{2ig}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & -\frac{2ig}{\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{2ig}{\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = 0$$

Получаем, что $ix_{12} = x_{32}$; $ix_{22} = x_{32}$, и задаём базисный вектор $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3} = \pm \frac{2ig}{\hbar}$ - комплексно сопряжённые собственные значения, поэтому общим

решением для этих векторов будет $C_2 * \operatorname{Re} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} e^{\frac{2igt}{\hbar}} + C_3 * \operatorname{Im} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} e^{\frac{2igt}{\hbar}} =$

$$= C_2 * \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ -\cos\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ \sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \end{pmatrix} + C_3 * \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ -\sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ -\cos\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \end{pmatrix}.$$

И получаем общее решение системы:

$$\begin{cases} a(t) = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) + C_3 \sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ b(t) = C_1 - C_2 \cos\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) - C_3 \sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \\ d_2(t) = C_2 \sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) - C_3 \cos\left(\frac{2gt}{\hbar}\right) \end{cases}$$

Из начальных условий $a(0) = 0$, $b(0) = 1$, $d_1(0) = 0$ находим

$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$, $C_3 = 0$ и получаем решение задачи Коши:

$$a(t) = \sin^2\left(\frac{gt}{\hbar}\right); b(t) = \cos^2\left(\frac{gt}{\hbar}\right); d_2(t) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{2gt}{\hbar}\right); c(t) = 0.$$

Построим график зависимости получившихся вероятностей населенности резонатора $a(t)$, $b(t)$, например, при $g = \hbar$.

```
Plot[{a[t] = (Sin[t])^2, b[t] = (Cos[t])^2}, {t, 0, 15},
  PlotStyle -> {{Green}, {Dashing[Large], Blue}}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotLegends -> "Expressions", ImageSize -> 500]
```

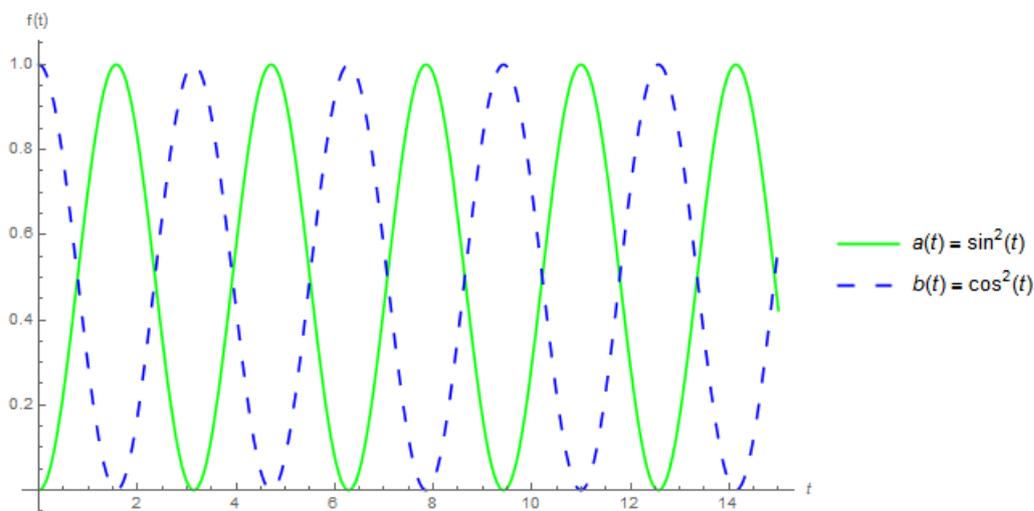


Рис.11. График зависимости вероятностей населенности резонатора $a(t)$, $b(t)$ при $g = \hbar$.

На получившемся графике видно, что в момент времени $t = 0$ в резонаторе атом поглощает фотон ($a(0)=0$, $b(0)=1$), из находится в возбужденном состоянии, испускает фотон момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ $a(\pi/2) = 1$, $b(\pi/2) = 0$, затем

принимает основное состояние и поглощает фотон, затем снова возбуждается и его испускает и т.д. Вероятности $a(t) + b(t) = 1, c(t) = 0$. В результате при $\gamma = 0$ происходят рабиевские осцилляции внутри резонатора, фотон не вылетает за пределы резонатора.

2.2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРИ $\gamma \neq 0$

Далее рассматриваем случай, когда интенсивность $\gamma \neq 0$. В этом случае работаем с уравнением Линдблада (3), в котором находим

$\mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(a\rho a^+ - \frac{1}{2} \{\rho, a^+ a\} \right)$. Далее производим вычисления всех слагаемых этого оператора.

$$a\rho a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ \bar{d} & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \{\rho, a^+ a\} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ \bar{d} & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ \bar{d} & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a & d/2 & 0 \\ \bar{d}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Суммируем, получаем

$$\mathcal{L}(\rho) = \gamma \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & d/2 & 0 \\ \bar{d}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -a\gamma & -\frac{d\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\bar{d}\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\gamma \end{pmatrix}$$

$$[H, \rho] = \begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b-a) & 0 \\ g(a-b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{найдено в п.2.2.1 выше.}$$

Далее подставляем получившиеся компоненты в (3) и получаем:

$$i\hbar\dot{\rho} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} & 0 \\ i\hbar\dot{\bar{d}} & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b-a) & 0 \\ g(a-b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -a\gamma & -\frac{d\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\bar{d}\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\gamma \end{pmatrix}$$

Учитываем, что элемент матрицы $d(t)$ является комплексным, т.е.

$d = d_1 + id_2$; $\bar{d} = d_1 - id_2$, $\dot{d} = \dot{d}_1 + i\dot{d}_2$, $\dot{\bar{d}} = \dot{d}_1 - i\dot{d}_2$, с помощью этого преобразуем левую и правую части уравнения, переходя везде к d_1, d_2 .

$$i\hbar\dot{\rho} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d} & 0 \\ i\hbar\dot{\bar{d}} & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\hbar\dot{a} & i\hbar\dot{d}_1 - \hbar\dot{d}_2 & 0 \\ i\hbar\dot{d}_1 + \hbar\dot{d}_2 & i\hbar\dot{b} & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar\dot{c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2igd_2 & g(b-a) & 0 \\ g(a-b) & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -a\gamma & -\frac{d\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\bar{d}\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2igd_2 - ia\gamma & g(b-a) - id_1\frac{\gamma}{2} + d_2\frac{\gamma}{2} & 0 \\ g(a-b) - id_1\frac{\gamma}{2} - d_2\frac{\gamma}{2} & 2igd_2 & 0 \\ 0 & 0 & ia\gamma \end{pmatrix}$$

Вводим начальные условия

$$a(0) = 0, b(0) = 1, c(0) = 0, d_1(0) = 0, d_2(0) = 0.$$

После упрощений получаем систему дифференциальных уравнений с

начальными условиями – задачу Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = -\frac{\gamma}{\hbar}a - \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{b} = \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{d}_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}d_1 \\ \dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar}a - \frac{g}{\hbar}b - \frac{\gamma}{2\hbar}d_2 \\ \dot{c} = \frac{\gamma}{\hbar}a \end{array} \right. \quad (*)$$

Была получена система дифференциальных уравнений. Найдем её решение со следующими начальными условиями:

$$a(0) = 0, b(0) = 1, d_1(0) = 0, d_2(0) = 0, c(0) = 0.$$

Т.к. третье уравнение является уравнением с разделяющимися переменными первой степени и зависит только от $d_1(t)$, то можем сразу найти его. Общее решение его имеет вид $d_1(t) = C \cdot e^{-\frac{\gamma}{2\hbar}t}$, а так как $d_1(0) = 0$, то $C = 0 \Rightarrow d_1(t) = 0$. Переменная $c(t)$ из пятого уравнения в остальных четырёх не встречается и зависит лишь от $a(t)$, имеет смысл перейти к системе из трёх оставшихся уравнений, выразив $c(t)$ после решения системы через получившееся $a(t)$.

Переходим от (*) к системе из 3-х уравнений с н.у.

$$a(0) = 0, b(0) = 1, d_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\gamma}{\hbar}a & -\frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{b} = & \frac{2g}{\hbar}d_2 \\ \dot{d}_2 = \frac{g}{\hbar}a - \frac{g}{\hbar}b - \frac{\gamma}{2\hbar}d_2 \end{cases}$$

Матрица правой части системы задана в виде $A = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\gamma}{2\hbar} \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен данной системы:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\frac{\gamma}{\hbar} - \lambda & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & -\lambda & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\gamma}{2\hbar} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований получилось $-\left(\lambda + \frac{\gamma}{2\hbar}\right)\left(\lambda^2 + \frac{\gamma}{\hbar}\lambda + \frac{4g^2}{\hbar^2}\right) = 0$.

Были получены собственные значения

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$$

Далее решение распадается на 3 случая:

- Комплексные собственные значения при $\gamma < 4g$. В этом случае они принимают вид $\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{i}{2\hbar} \sqrt{16g^2 - \gamma^2}$;
- Кратные собственные значения (кратность 3) при $\gamma = 4g$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\gamma}{2\hbar}$;
- Действительные некрратные собственные значения при $\gamma > 4g$. Здесь $\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$.

Рассмотрим их подробно в следующих разделах.

2.2.3.1 СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ($\gamma < 4g$)

При $\gamma < 4g$ собственные значения имеют вид

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{i}{2\hbar} \sqrt{16g^2 - \gamma^2}.$$

Вводим матрицу A из коэффициентов системы, $A = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\gamma}{2\hbar} \end{pmatrix}$.

Найдем для этих собственных значений соответственно собственные векторы.

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}.$$

Характеристическое уравнение для λ_1 :

$$(A - \lambda_1 E)x = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{\gamma}{2\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили $x_{12} = x_{11} = -\frac{\gamma}{4g}x_{13}$ и искомый собственный вектор $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\gamma}{4g} \end{pmatrix}$.

$$\text{Общее решение для } \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar} \quad \begin{cases} a_1 = C_1 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ b_1 = C_1 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ (d_2)_1 = -\frac{\gamma}{4g} C_1 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \end{cases}.$$

$$2) \lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{i}{2\hbar} \sqrt{16g^2 - \gamma^2}.$$

Ищем собственный вектор, соответствующий данному комплексному собственному значению $\lambda_2 = -\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{i}{2\hbar} \sqrt{16g^2 - \gamma^2}$.

$$(A - \lambda_2 E)x = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\hbar} - i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{\gamma}{2\hbar} - i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Получили } x_{21} = -\frac{\frac{2g}{\hbar}}{\left(\frac{\gamma}{2\hbar} - i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right)} x_{23}; \quad x_{22} = -\frac{\frac{2g}{\hbar}}{\left(\frac{\gamma}{2\hbar} - i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right)} x_{23},$$

$$\text{Откуда, взяв } x_{23} = -\frac{\left(\frac{\gamma}{2\hbar} - i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right)\left(\frac{\gamma}{2\hbar} + i\frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar}\right)}{\frac{2g}{\hbar}} = -\frac{2g}{\hbar}, \text{ получим собственный}$$

вектор: $\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2\hbar} - i \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \\ \frac{\gamma}{2\hbar} + i \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \\ -\frac{2g}{\hbar} \end{pmatrix}$. Получено частное решение:

$$\begin{cases} a_2 = \left(\frac{\gamma}{2\hbar} - i \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) e^{-\frac{t \cdot (\gamma - i\sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \\ b_2 = \left(\frac{\gamma}{2\hbar} + i \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) e^{-\frac{t \cdot (\gamma + i\sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \\ (d_2)_2 = -\frac{2g}{\hbar} e^{-\frac{t \cdot (\gamma - i\sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \end{cases}$$

Зная, что в исходной системе вещественные коэффициенты, то решение для $\lambda_3 = -\frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{1}{2\hbar}\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$ можно не искать, оно будет комплексно сопряжённым с найденным решением. Для получения общего решения надо взять вещественную и комплексную часть полученного решения.

Сумма общих решений для $\lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{1}{2\hbar}\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$, где Re – действительная часть решения, а Im – мнимая, имеет вид:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = C_2 Re(a_2) + C_3 Im(a_2) \\ b_2 + b_3 = C_2 Re(b_2) + C_3 Im(b_2) \\ (d_2)_2 + (d_2)_3 = C_2 Re((d_2)_2) + C_3 Im((d_2)_2) \end{cases}$$

При нахождении их используем формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

$$e^{-\frac{t \cdot (\gamma - i\sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} = e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + i \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right).$$

Общее решение для действительной части:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = C_2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\frac{\gamma}{2\hbar} \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ b_2 = C_2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\frac{\gamma}{2\hbar} \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) - \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ (d_2)_2 = -C_2 \frac{2g}{\hbar} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \end{array} \right.$$

Общее решение для мнимой части:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = C_3 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\frac{\gamma}{2\hbar} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) - \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ b_3 = C_3 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\frac{\gamma}{2\hbar} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) - \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ (d_2)_3 = -C_3 \frac{2g}{\hbar} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \end{array} \right.$$

Суммируем общие решения для всех собственных значений и получаем общее решение системы для случая комплексных корней. Затем находим $c(t)$, подставив найденное $a(t)$ в $\dot{c} = \frac{\gamma}{\hbar} a$. В итоге получаем $c(t) = C_4 - e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(C_1 + \frac{\gamma}{\hbar} \left(C_2 \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + C_3 \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \right)$, и полное общее решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(C_1 + \frac{1}{2\hbar} \left((C_2\gamma - C_3\sqrt{16g^2 - \gamma^2}) \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + (C_3\gamma + C_2\sqrt{16g^2 - \gamma^2}) \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \right) \\ b(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(C_1 + \frac{1}{2\hbar} \left((C_2\gamma + C_3\sqrt{16g^2 - \gamma^2}) \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + (C_3\gamma - C_2\sqrt{16g^2 - \gamma^2}) \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \right) \\ c(t) = C_4 - e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(2C_1 + \frac{\gamma}{\hbar} \left(C_2 \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + C_3 \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \right) \\ d_2(t) = -e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\frac{\gamma}{4g} C_1 + \frac{2g}{\hbar} \left(C_2 \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + C_3 \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \right) \\ d_1(t) = C_5 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \end{array} \right.$$

Подставив в систему начальные условия, найдём искомое частное решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(C_1 + \frac{1}{2\hbar} (C_2\gamma - C_3\sqrt{16g^2 - \gamma^2}) \right) = 0 \\ b(0) = e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(C_1 + \frac{1}{2\hbar} (C_2\gamma + C_3\sqrt{16g^2 - \gamma^2}) \right) = 1 \\ c(0) = C_4 - \left(2C_1 + \frac{\gamma}{\hbar} C_2 \right) = 0 \\ d_2(0) = - \left(\frac{\gamma}{4g} C_1 + \frac{2g}{\hbar} C_2 \right) = 0 \\ d_1(0) = C_5 = 0 \end{array} \right.$$

Отсюда $C_5 = 0 \Rightarrow d_1(t) = 0$. $b(0) - a(0) = C_3 \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{\hbar} = 1$, $C_3 = \frac{\hbar}{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}$.

Из уравнения $d_2(0) = 0$ $C_1 = -C_2 \frac{8g^2}{\gamma\hbar}$, подставим в $a(0) = 0$, получим $-C_2 * \frac{8g^2}{\gamma\hbar} + C_2 \frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{\hbar\gamma}{\gamma^2 - 16g^2}$ и $C_1 = -C_2 \frac{8g^2}{\gamma\hbar} = \frac{8g^2}{16g^2 - \gamma^2}$.

$C_4 = C_1 + \frac{\gamma}{\hbar} C_2 = \frac{16g^2}{16g^2 - \gamma^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 16g^2} = 1$. Подставив все найденные

константы, получим решение задачи Коши при $\gamma < 4g$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{8g^2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(1 - \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ b(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(8g^2 - (\gamma^2 - 8g^2) \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + \gamma\sqrt{16g^2 - \gamma^2} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ c(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(16g^2 - \gamma^2 \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) + \gamma\sqrt{16g^2 - \gamma^2} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ d_2(t) = \frac{2ge^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}}{16g^2 - \gamma^2} \left(-\gamma + \gamma \cos \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) - \sqrt{16g^2 - \gamma^2} \sin \left(\frac{t\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) \right) \\ d_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

2.2.3.2 СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ($\gamma = 4g$)

При $\gamma = 4g$ все три собственных значения совпадают (имеют кратность 3)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = -\frac{\gamma}{2\hbar} = -4g.$$

Продолжаем использовать матрицу A , состоящую из коэффициентов системы,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\gamma}{2\hbar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4g}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{2g}{\hbar} \end{pmatrix}.$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\frac{2g}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{2g}{\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Для кратного корня } \lambda = -\frac{\gamma}{2\hbar} = -4g \text{ определим}$$

сначала количество линейно независимых векторов. Оно равно разности порядка матрицы $A - \lambda E$ и её ранга. Он равен $m=3-2=1$ (ранг см. ниже).

$$rk(A - \lambda E) = rk \begin{pmatrix} -\frac{4g}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{2g}{\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & 0 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Кратность нашего корня $k=3$. $k > m$, поэтому ищем решение в виде произведения многочлена степени $k - m$ на $e^{\lambda t} = e^{-\frac{\gamma}{2\hbar}t}$ [7]. Общее решение

$$\text{ищется в виде } \begin{cases} a(t) = (a_1 + a_2 t + a_3 t^2) e^{-\frac{\gamma}{2\hbar}t} \\ b(t) = (b_1 + b_2 t + b_3 t^2) e^{-\frac{\gamma}{2\hbar}t} \\ d_2(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{-\frac{\gamma}{2\hbar}t} \end{cases}$$

Подставив эти многочлены в исходную систему, продифференцировав левые части и приравнявая в каждом из трёх уравнений коэффициенты при t, t^2 и свободные члены получаем систему из 9 уравнений:

$$\begin{pmatrix} q & -q & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & 2q & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & -q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & -q & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & 2q & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & -q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица элементарными преобразованиями приведена к ступенчатому виду, её ранг 6, количество нулевых векторов 3, то есть имеем 6 базисных переменных и 3 свободных.

Обозначим их $c_1 = C_1$, $a_2 = C_2$, $c_2 = C_3$, выразим через них оставшиеся переменные.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = -q(a_2 + c_2) \\ a_1 = -\frac{a_2}{2q} - c_1 \\ b_3 = -q(a_2 + c_2) \\ b_2 = -a_2 - 2c_2 \\ c_3 = q(a_2 + c_2) \\ b_1 = -\frac{1}{2q}(a_2 + 2c_2) - c_1 \end{array} \right. \quad \text{после подстановки:} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_3 = -\frac{g}{\hbar}(C_2 + C_3) \\ a_1 = -\frac{\hbar c_2}{2g} - C_1 \\ b_3 = -\frac{g}{\hbar}(C_2 + C_3) \\ b_2 = -C_2 - 2C_3 \\ c_3 = \frac{g}{\hbar}(C_2 + C_3) \\ b_1 = -\frac{g}{2\hbar}(C_2 + 2C_3) - C_1 \end{array} \right.$$

Подставляем полученные коэффициенты в общее решение, которое после упрощений получаем в виде $(c(t))$ находится после подстановки найденного $a(t)$ в $\dot{c} = \frac{\gamma}{\hbar}a$, $d_1(t)$ во всех случаях одинаковый):

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \left(C_1 - \frac{\gamma}{2\hbar} t(C_1 + C_3) + \frac{\gamma^2}{16\hbar^2} (C_1 + C_2 + 2C_3)t^2 \right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ b(t) = \left(C_2 - \frac{\gamma}{2\hbar} t(C_2 + C_3) + \frac{\gamma^2}{16\hbar^2} (C_1 + C_2 + 2C_3)t^2 \right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ c(t) = \left(-C_1 - C_2 + \frac{\gamma}{2\hbar} t(C_1 - C_2) + \frac{\gamma^2}{8\hbar^2} (C_1 + C_2 + 2C_3)t^2 \right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} + C_1 + C_2 + C_4 \\ d_2(t) = \left(C_3 + \frac{\gamma}{4\hbar} t(C_1 - C_2) - \frac{\gamma^2}{16\hbar^2} (C_1 + C_2 + 2C_3)t^2 \right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ d_1(t) = C_5 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \end{array} \right.$$

Ищем частное решение, подставляем начальные условия.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = C_1 = 0 \\ b(0) = C_2 = 1 \\ c(0) = C_4 = 0 \\ d_2(0) = C_3 = 0 \\ d_1(0) = C_5 = 0 \end{array} \right.$$

Отсюда $C_1 = C_3 = C_4 = C_5 = 0 \Rightarrow d_1(t) = 0$. $C_2 = 1$.

Подставим полученные коэффициенты и получим решение задачи Коши при $\gamma = 4g$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{\gamma^2}{16\hbar^2} t^2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ b(t) = \left(1 + \frac{\gamma}{4\hbar} t \right)^2 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ c(t) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma}{2\hbar} t + \frac{\gamma^2}{8\hbar^2} t^2 \right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ d_2(t) = -\frac{\gamma}{4\hbar} t \left(1 + \frac{\gamma}{4\hbar} t \right) e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ d_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

2.2.3.3 СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ НЕКРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ($\gamma > 4g$)

При $\gamma > 4g$ собственные значения имеют вид

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2\hbar} \pm \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}.$$

Продолжаем использовать матрицу A из коэффициентов исходной системы,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & 0 & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\gamma}{2\hbar} \end{pmatrix}.$$

Найдем для этих собственных значений соответственно собственные векторы.

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar}.$$

Характеристическое уравнение для λ_1 :

$$(A - \lambda_1 E)x = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{\gamma}{2\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично случаю комплексных корней собственный вектор $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{\gamma}{4g} \end{pmatrix}$.

$$\text{Общее решение для } \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2\hbar} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = C_1 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ b_1 = C_1 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \\ (d_2)_1 = -\frac{\gamma}{4g} C_1 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \end{array} \right. .$$

$$2) \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}.$$

Ищем собственный вектор, соответствующий данному собственному значению $\lambda_2 = -\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$.

$$(A - \lambda_2 E)x = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & -\frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Получили } x_{21} = -\frac{\frac{2g}{\hbar}}{\left(\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)} x_{23}; \quad x_{22} = \frac{\frac{2g}{\hbar}}{\left(-\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)} x_{23},$$

$$\text{Откуда, взяв } x_{23} = \frac{\left(-\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)\left(\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)}{\frac{2g}{\hbar}} = -\frac{2g}{\hbar}, \text{ получим собственный}$$

$$\text{вектор: } \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \\ \frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \\ -\frac{2g}{\hbar} \end{pmatrix}. \text{ Получено общее решение для второго корня:}$$

$$\begin{cases} a_2 = C_2 \left(\frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) e^{-\frac{t(\gamma - \sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \\ b_2 = C_2 \left(\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \right) e^{-\frac{t(\gamma - \sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \\ (d_2)_2 = -\frac{2g}{\hbar} C_2 e^{-\frac{t(\gamma - \sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \end{cases}$$

$$3) \lambda_3 = -\frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}.$$

Ищем собственный вектор, соответствующий данному собственному значению $\lambda_3 = -\frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$.

$$(A - \lambda_3 E)x = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} & 0 & -\frac{2g}{\hbar} \\ 0 & \frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} & \frac{2g}{\hbar} \\ \frac{g}{\hbar} & -\frac{g}{\hbar} & \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Получили } x_{31} = -\frac{\frac{2g}{\hbar}}{\left(-\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)} x_{33}; \quad x_{32} = -\frac{\frac{2g}{\hbar}}{\left(\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)} x_{33},$$

$$\text{Откуда, взяв } x_{33} = \frac{\left(-\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)\left(\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}\right)}{\frac{2g}{\hbar}} = -\frac{2g}{\hbar}, \text{ получим собственный}$$

$$\text{вектор: } \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \\ \frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \\ -\frac{2g}{\hbar} \end{pmatrix}. \text{ Получено общее решение для третьего корня:}$$

$$\begin{cases} a_3 = C_3 \left(\frac{\gamma}{2\hbar} + \frac{\sqrt{16g^2 - \gamma^2}}{2\hbar} \right) e^{-\frac{t(\gamma + \sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \\ b_3 = C_3 \left(\frac{\gamma}{2\hbar} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar} \right) e^{-\frac{t(\gamma + \sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \\ (d_2)_3 = -\frac{2g}{\hbar} C_3 e^{-\frac{t(\gamma + \sqrt{16g^2 - \gamma^2})}{2\hbar}} \end{cases}$$

Переменная $c(t)$ находится после подстановки найденного $a(t)$ в $\dot{c} = \frac{\gamma}{\hbar} a$

$$(c(t) = C_4 - \frac{1}{\hbar} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(2\hbar C_1 + C_2 \gamma e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + C_3 \gamma e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right)), \quad d_1(t) \text{ везде } C_5 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}}.$$

Выпишем общее решение системы, просуммировав общие решения для каждого собственного значения, умноженные на константы.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{1}{2\hbar} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(2\hbar C_1 + C_2(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + C_3(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ b(t) = \frac{1}{2\hbar} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(2\hbar C_1 + C_2(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + C_3(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ c(t) = C_4 - \frac{1}{\hbar} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(2\hbar C_1 + C_2 \gamma e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + C_3 \gamma e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ d_2(t) = -e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(\frac{\gamma}{4g} C_1 + \frac{2g}{\hbar} \left(C_2 e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + C_3 e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \right) \\ d_1(t) = C_5 e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \end{array} \right.$$

Ищем частное решение, подставляя начальные условия.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0) = C_1 + \frac{1}{2\hbar} (C_2(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) + C_3(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})) = 0 \\ b(0) = C_1 + \frac{1}{2\hbar} (C_2(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) + C_3(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})) = 1 \\ c(0) = C_4 - \frac{1}{\hbar} (2\hbar C_1 + C_2 \gamma + C_3 \gamma) = 0 \\ d_2(0) = \frac{\gamma}{4g} C_1 + \frac{2g}{\hbar} (C_2 + C_3) = 0 \\ d_1(0) = C_5 = 0 \end{array} \right.$$

Отсюда $C_5 = 0 \Rightarrow d_1(t) = 0$. $b(0) - a(0) = (C_2 - C_3) \frac{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{\hbar} = 1$, $b(0) + a(0) = 2C_1 + (C_2 + C_3) \frac{\gamma}{\hbar} = 1$. Поэтому $C_4 = \frac{1}{\hbar} (2\hbar C_1 + C_2 \gamma + C_3 \gamma) = 1$. $d_2(0) = -\left(\frac{\gamma}{4g} C_1 + \frac{2g}{\hbar} (C_2 + C_3) \right) = \frac{\gamma}{4g} C_1 + \frac{2g}{\gamma} (1 - 2C_1) = 0$ и $C_1 = \frac{8g^2}{16g^2 - \gamma^2}$. $C_2 = C_3 + \frac{\hbar}{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}$, подставим в $b(0) + a(0) = 2C_1 + (C_2 + C_3) \frac{\gamma}{\hbar} = \frac{16g^2}{16g^2 - \gamma^2} + (2C_3 + \frac{\hbar}{\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}) \frac{\gamma}{\hbar} = 1$, откуда получаем $C_3 = \frac{\hbar(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})}{2(\gamma^2 - 16g^2)}$, $C_2 = \frac{\hbar(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})}{2(\gamma^2 - 16g^2)}$.

Подставив все найденные константы и упростив, получим решение задачи

Коши при $\gamma > 4g$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{4g^2}{\gamma^2 - 16g^2} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(-2 + e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ b(t) = \frac{1}{4(\gamma^2 - 16g^2)} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(-32g^2 + (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})^2 e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} + (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})^2 e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ c(t) = 1 + \frac{1}{2(\gamma^2 - 16g^2)} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(32g^2 - (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})\gamma e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} - (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2})\gamma e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ d_2(t) = \frac{g}{\gamma^2 - 16g^2} e^{-\frac{\gamma t}{2\hbar}} \left(2\gamma - (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} - (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 16g^2}) e^{-\frac{t\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}}{2\hbar}} \right) \\ d_1(t) = 0 \end{array} \right.$$

2.3 ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проводим численный эксперимент, чтобы показать поведение динамики населенности резонатора, динамики вероятности возбуждения атома и динамику населенности стока $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ при различных значениях параметров γ, g . Постоянную Дирака \hbar для удобства везде приравняем к 1. Сначала рассмотрим решения всех наших систем при $0 < \gamma < 4g$; $\gamma = 4g$; $\gamma > 4g$ (при $\gamma = 0$ происходят рабиевские осцилляции атома с фотоном, который не вылетает из стока, этот случай уже рассмотрен в п.2.2.2). Берём $g = 1$ и наблюдаем изменения графиков при различных γ : $0 < \gamma < 4g$ (рис.) $\gamma = 4g$ (рис.); $\gamma > 4g$ (рис.). Графики построены при помощи Wolfram Mathematica 10.0.

$$\begin{aligned}
 a[t_, y_, g_, h_] &:= \frac{8 e^{-\frac{t y}{2 h}} g^2 \left(-1 + \text{Cos} \left[\frac{t \sqrt{16 g^2 - y^2}}{2 h} \right] \right)}{-16 g^2 + y^2} \\
 b[t_, y_, g_, h_] &:= \frac{1}{-16 g^2 + y^2} e^{-\frac{t y}{2 h}} \left(-8 g^2 + (-8 g^2 + y^2) \text{Cos} \left[\frac{t \sqrt{16 g^2 - y^2}}{2 h} \right] - y \sqrt{16 g^2 - y^2} \text{Sin} \left[\frac{t \sqrt{16 g^2 - y^2}}{2 h} \right] \right) \\
 c[t_, y_, g_, h_] &:= \\
 &\frac{1}{-16 g^2 + y^2} e^{-\frac{t y}{2 h}} \left(16 g^2 - 16 e^{\frac{t y}{2 h}} g^2 + e^{\frac{t y}{2 h}} y^2 - y^2 \text{Cos} \left[\frac{t \sqrt{16 g^2 - y^2}}{2 h} \right] + y \sqrt{16 g^2 - y^2} \text{Sin} \left[\frac{t \sqrt{16 g^2 - y^2}}{2 h} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Рис. 12 Решение системы в Wolfram при $0 < \gamma < 4g$

```
Plot[{a[t, 0.01, 1, 1], b[t, 0.01, 1, 1], c[t, 0.01, 1, 1]}, {t, 0, 15},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

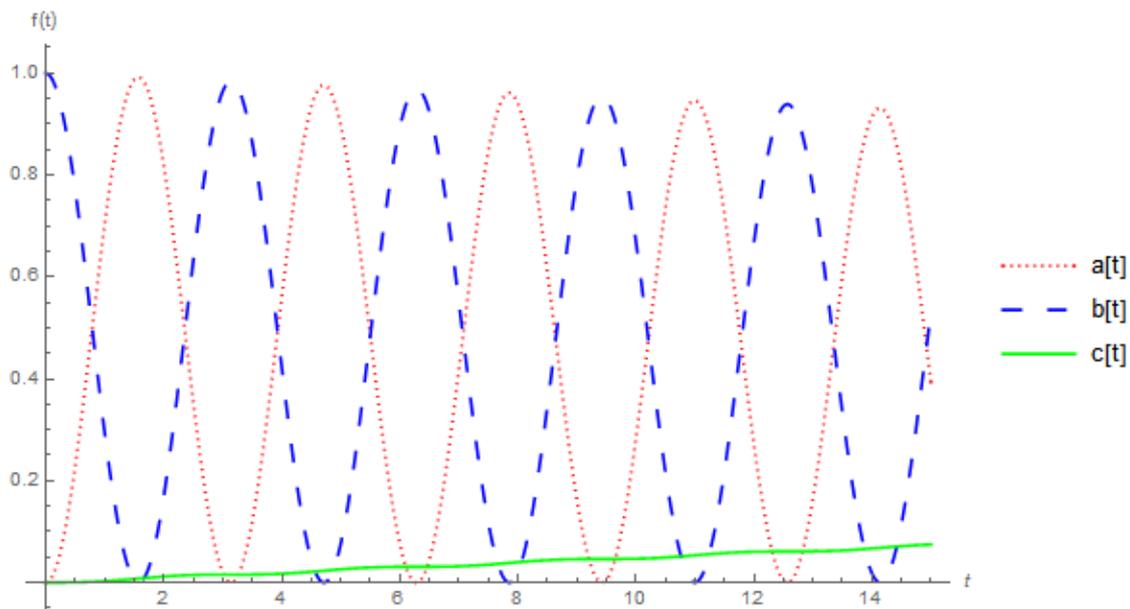


Рис. 13 Графики вероятностей при $\gamma = 0,01$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 0.05, 1, 1], b[t, 0.05, 1, 1], c[t, 0.05, 1, 1]}, {t, 0, 15},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

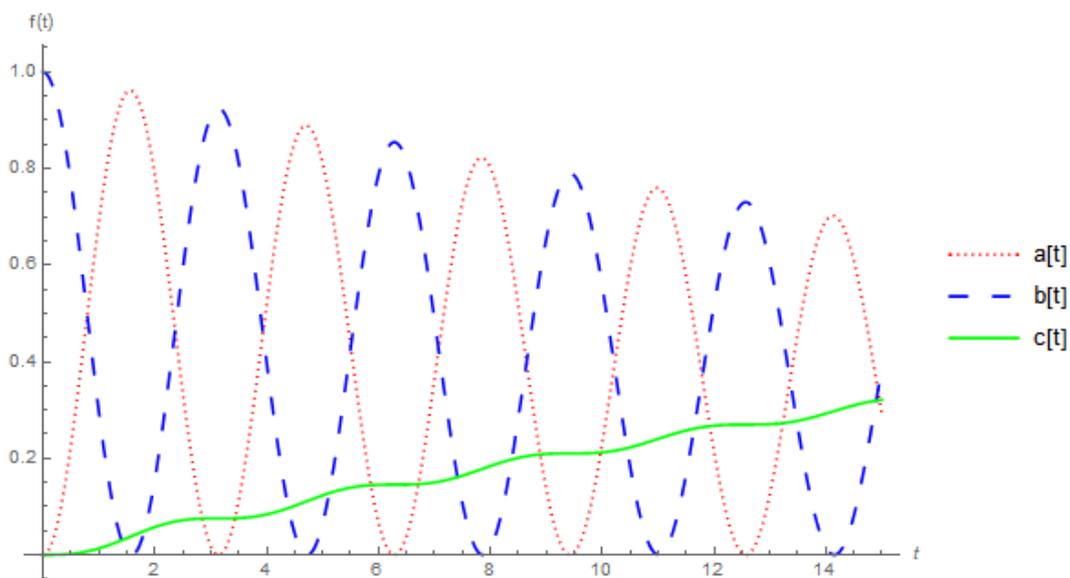


Рис. 14 Графики вероятностей при $\gamma = 0,05$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 0.1, 1, 1], b[t, 0.1, 1, 1], c[t, 0.1, 1, 1]}, {t, 0, 15},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

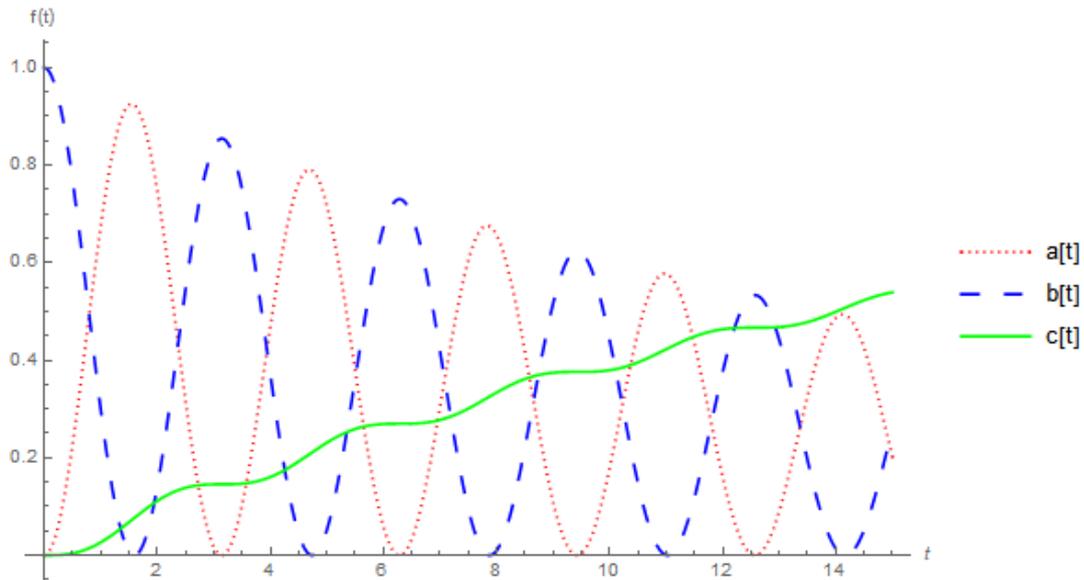


Рис. 15 Графики вероятностей при $\gamma = 0,1$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 0.25, 1, 1], b[t, 0.25, 1, 1], c[t, 0.25, 1, 1]}, {t, 0, 15},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

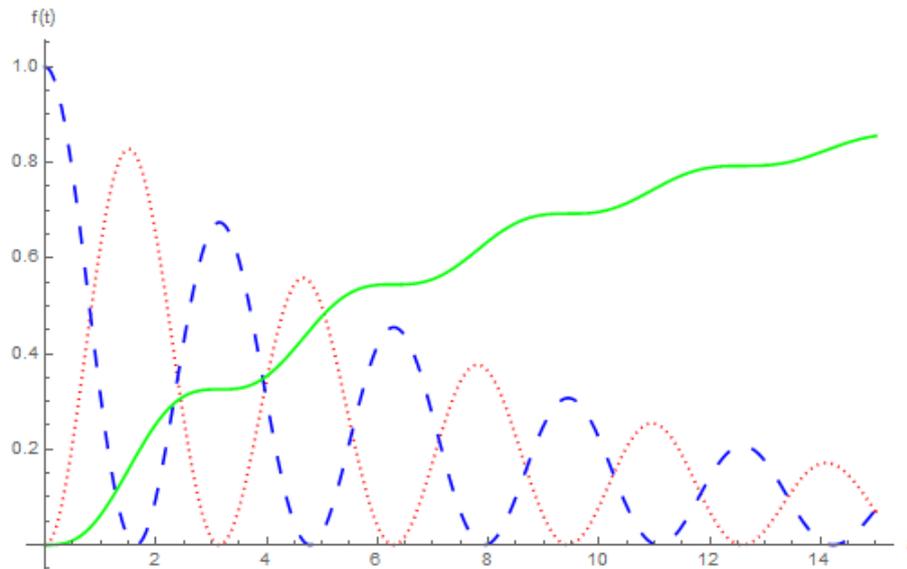


Рис. 16 Графики вероятностей при $\gamma = 0,25$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 0.5, 1, 1], b[t, 0.5, 1, 1], c[t, 0.5, 1, 1]}, {t, 0, 15},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

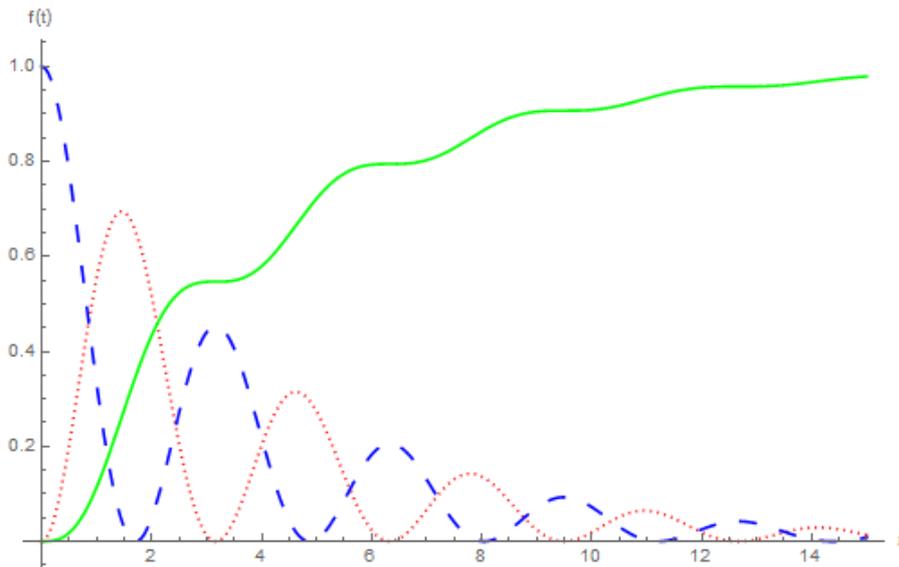


Рис. 17 Графики вероятностей при $\gamma = 0,5$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 1, 1, 1], b[t, 1, 1, 1], c[t, 1, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

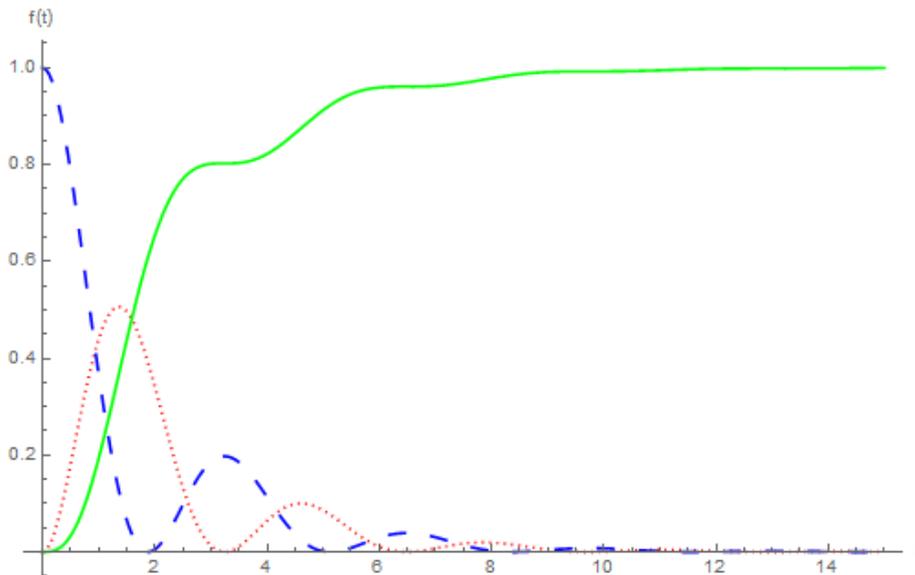


Рис. 18 Графики вероятностей при $\gamma = 1$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 2, 1, 1], b[t, 2, 1, 1], c[t, 2, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

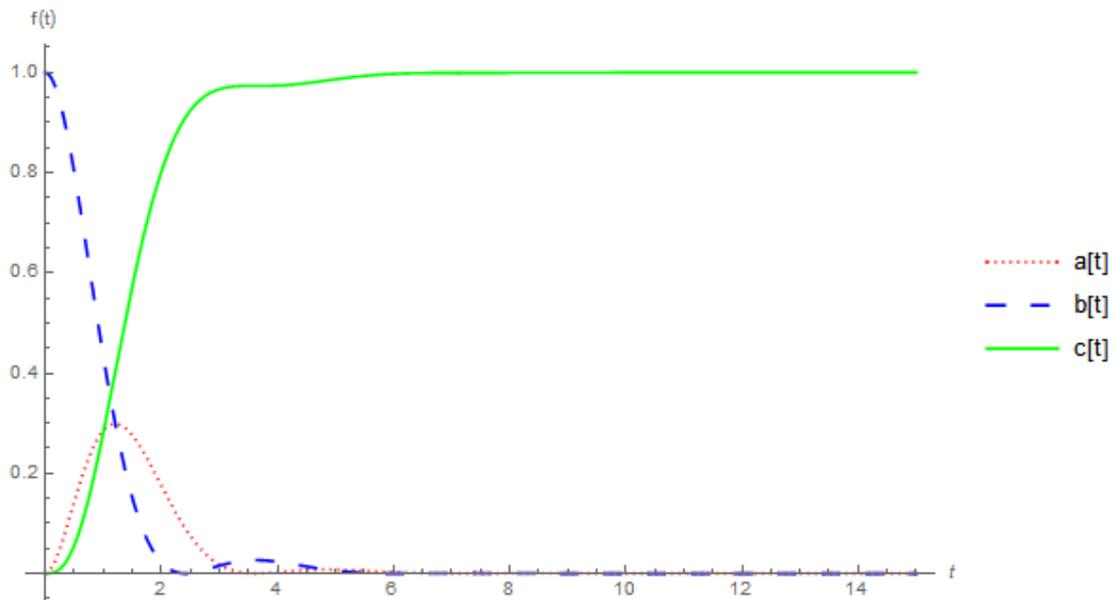


Рис. 19 Графики вероятностей при $\gamma = 2$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 3.9, 1, 1], b[t, 3.9, 1, 1], c[t, 3.9, 1, 1]}, {t, 0, 15},
AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

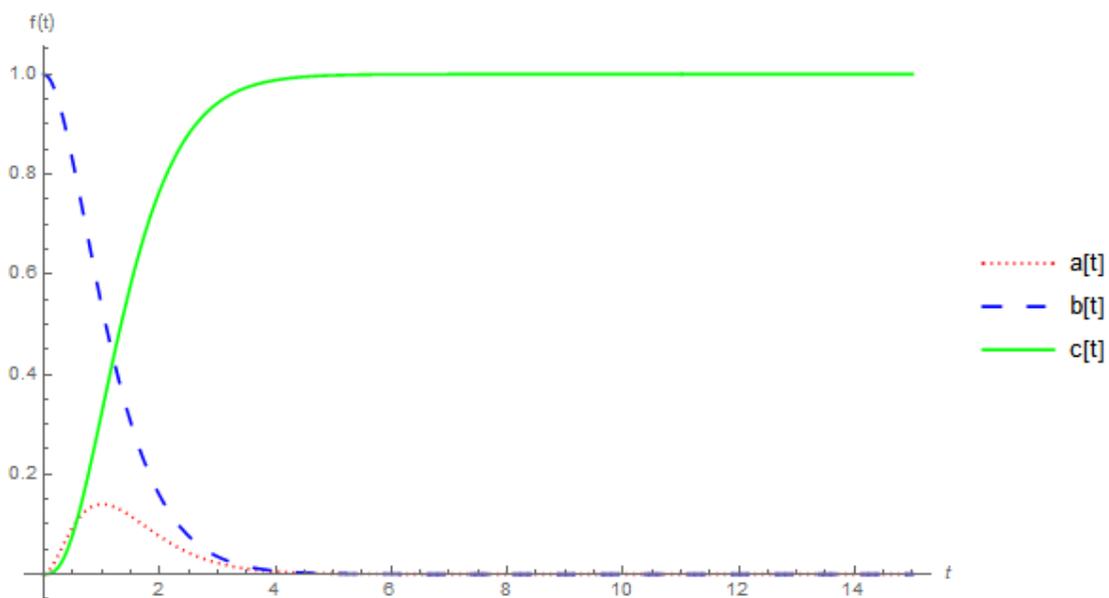


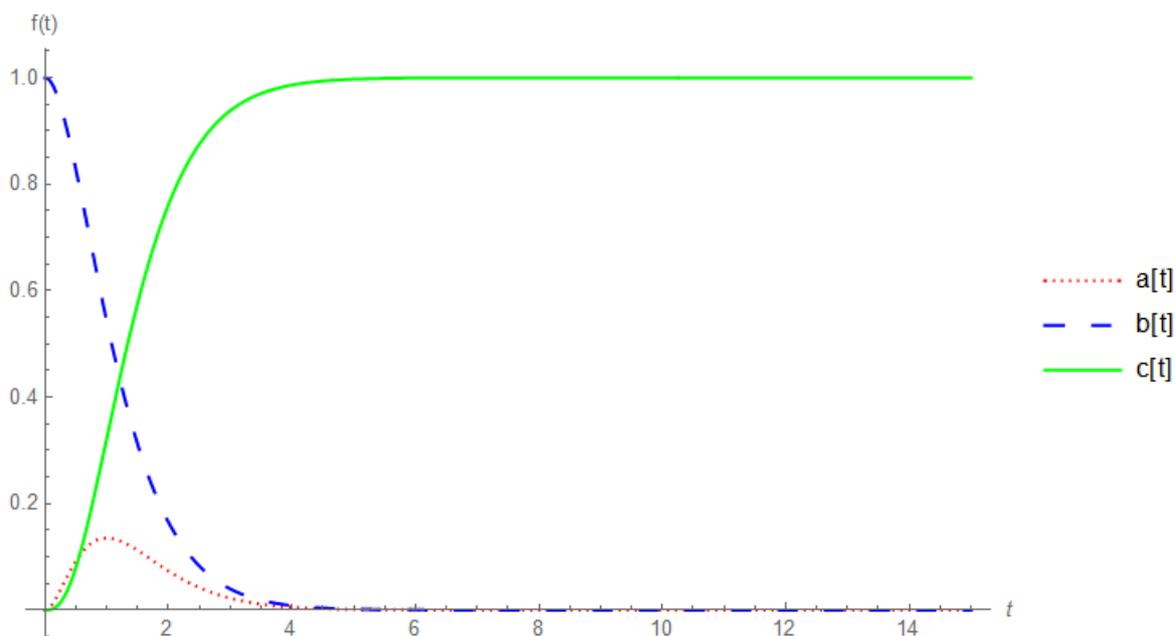
Рис. 20 Графики вероятностей при $\gamma = 3,9$; $g = 1$

$$a[t_-, g_-, h_-] := \frac{e^{-\frac{2 g t}{h}} g^2 t^2}{h^2}$$

$$b[t_-, g_-, h_-] := \frac{e^{-\frac{2 g t}{h}} (h + g t)^2}{h^2}$$

$$c[t_-, g_-, h_-] := \frac{e^{-\frac{2 g t}{h}} \left(\left(-1 + e^{\frac{2 g t}{h}} \right) h^2 - 2 g h t - 2 g^2 t^2 \right)}{h^2}$$

```
Plot[{a[t, 1, 1], b[t, 1, 1], c[t, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

Рис. 21 Решение системы в Wolfram при $\gamma = 4g$ Рис. 22 Графики вероятностей при $\gamma = 4$; $g = 1$

$$a[t_-, y_-, g_-, h_-] := \frac{4 e^{-\frac{t(y + \sqrt{-16 g^2 + y^2})}{2h}} \left(-1 + e^{\frac{t \sqrt{-16 g^2 + y^2}}{2h}} \right)^2 g^2}{-16 g^2 + y^2}$$

$$b[t_-, y_-, g_-, h_-] := \frac{1}{2(-16 g^2 + y^2)} e^{-\frac{t(y + \sqrt{-16 g^2 + y^2})}{2h}} \left(-8 \left(1 + e^{\frac{t \sqrt{-16 g^2 + y^2}}{2h}} \right)^2 g^2 + y \left(\left(1 + e^{\frac{t \sqrt{-16 g^2 + y^2}}{h}} \right) y + \left(-1 + e^{\frac{t \sqrt{-16 g^2 + y^2}}{h}} \right) \sqrt{-16 g^2 + y^2} \right) \right)$$

$$c[t_-, y_-, g_-, h_-] := \frac{1}{2(-16 g^2 + y^2)} e^{-\frac{t(y + \sqrt{-16 g^2 + y^2})}{2h}} \left(32 e^{\frac{t \sqrt{-16 g^2 + y^2}}{2h}} g^2 + 2 e^{\frac{t(y + \sqrt{-16 g^2 + y^2})}{2h}} (-16 g^2 + y^2) + y \left(-y + \sqrt{-16 g^2 + y^2} \right) - e^{\frac{t \sqrt{-16 g^2 + y^2}}{h}} y \left(y + \sqrt{-16 g^2 + y^2} \right) \right)$$
Рис. 23 Решение системы в Wolfram при $\gamma > 4g$

```
Plot[{a[t, 4.1, 1, 1], b[t, 4.1, 1, 1], c[t, 4.1, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

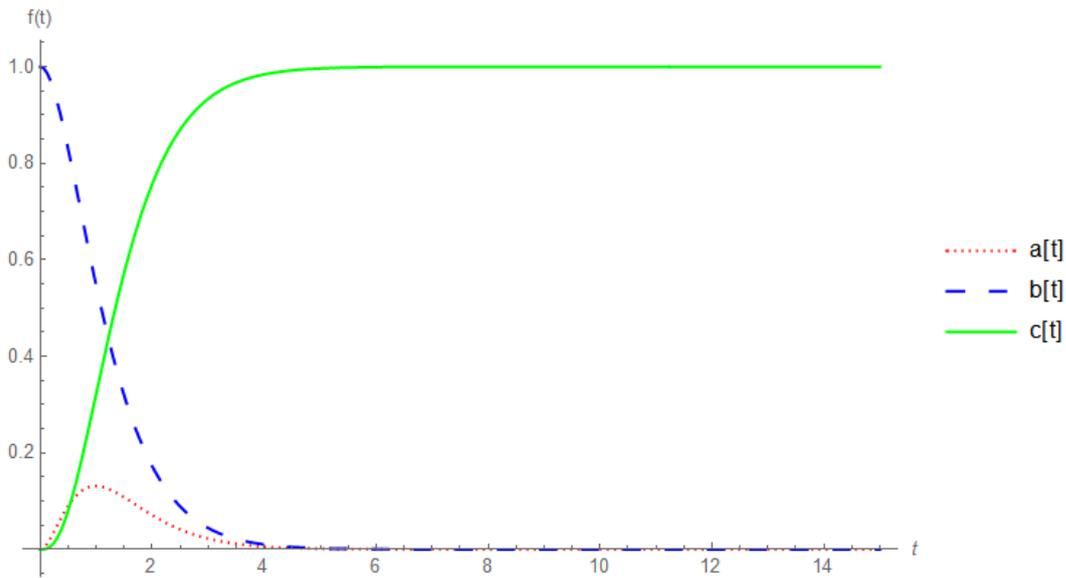


Рис. 24 Графики вероятностей при $\gamma = 4,1$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 7, 1, 1], b[t, 7, 1, 1], c[t, 7, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

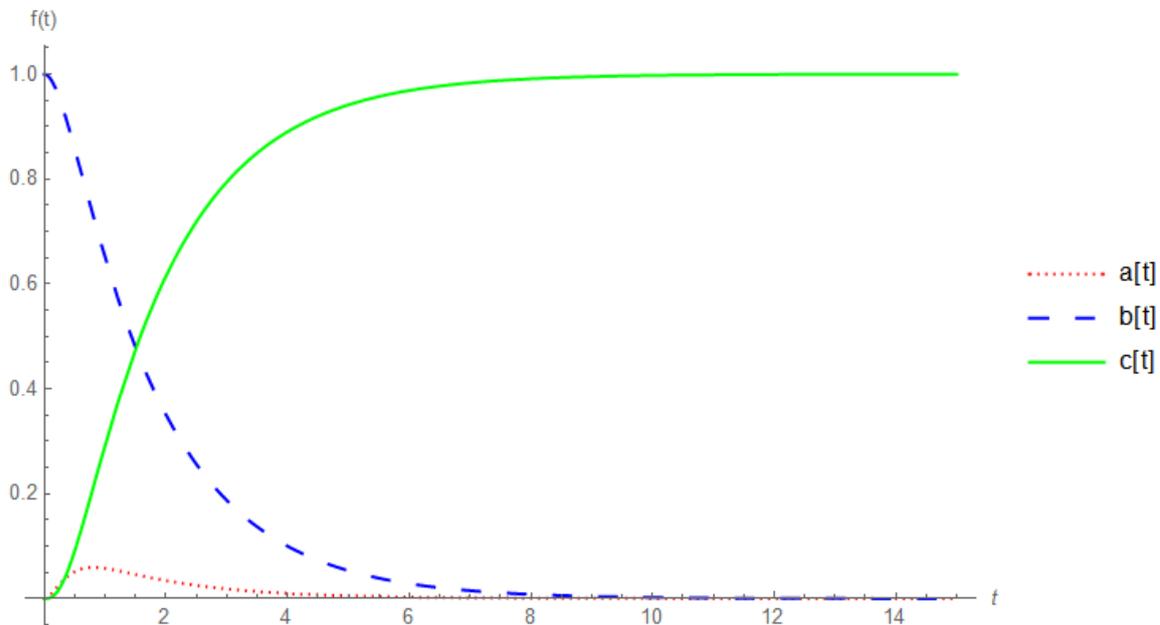


Рис. 25 Графики вероятностей при $\gamma = 7$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 10, 1, 1], b[t, 10, 1, 1], c[t, 10, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

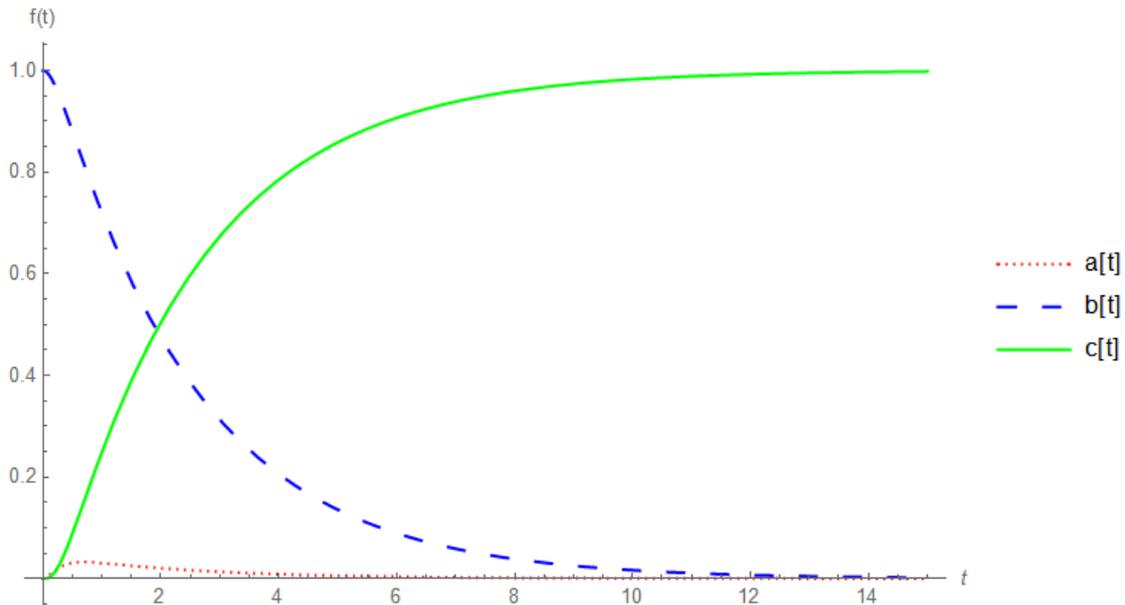


Рис. 26 Графики вероятностей при $\gamma = 10$; $g = 1$

```
Plot[{a[t, 20, 1, 1], b[t, 20, 1, 1], c[t, 20, 1, 1]}, {t, 0, 15}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

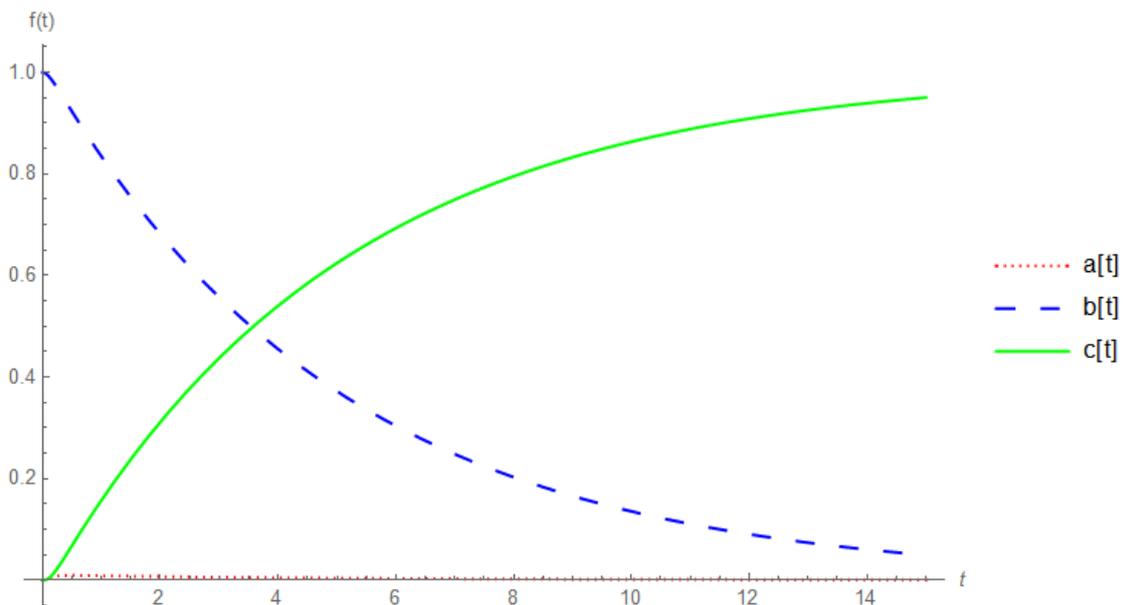


Рис. 27 Графики вероятностей при $\gamma = 20$; $g = 1$

При $0 < \gamma < 4g$ и малых γ , после испускания атомом фотона, тот некоторое время находится в резонаторе, затем вылетает, $a(t)$, $b(t)$ представляют собой затухающие к 0 осцилляции (рис.13-17). С увеличением γ , количество осцилляций уменьшается (рис.18-20), фотон всё меньше находится в резонаторе после своего рождения. При $\gamma = 4g$ осцилляции прекращаются полностью (рис.22).

При $\gamma > 4g$, вероятность возбуждения атома падает, вероятность нахождения в стоке растёт, причём после вылета фотон не задерживается в резонаторе (рис.24-25). С увеличением γ (рис.26-27), динамика перехода фотона из резонатора в сток становится более медленной. Данный эффект называется quantum bottleneck[6].

Теперь рассмотрим несколько графиков при постоянном $\gamma = 0,01$ и увеличении g (значение которого ограниченное из-за RWA-приближения).

```
Plot[{a[t, 0.01, 0.0001, 1], b[t, 0.01, 0.0001, 1], c[t, 0.01, 0.0001, 1]}, {t, 0, 10000},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"}, PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

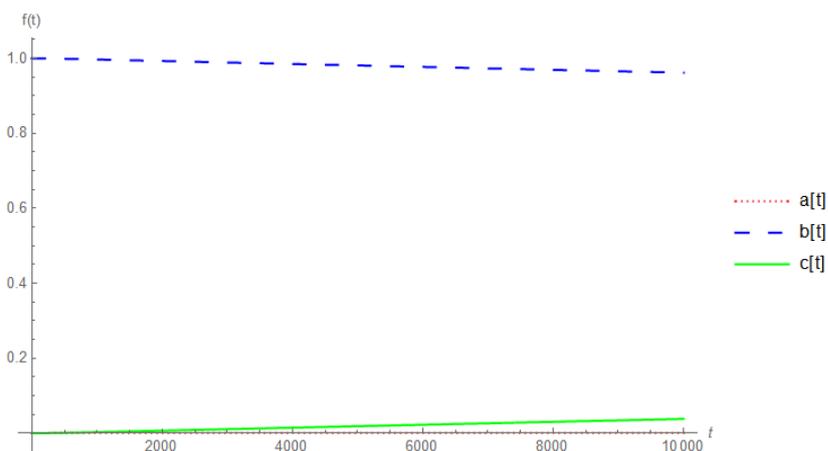


Рис. 28 Графики вероятностей при $\gamma = 0.01$; $g = 0.0001$

```
Plot[{a[t, 0.01, 0.001, 1], b[t, 0.01, 0.001, 1], c[t, 0.01, 0.001, 1]}, {t, 0, 10000},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"}, PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

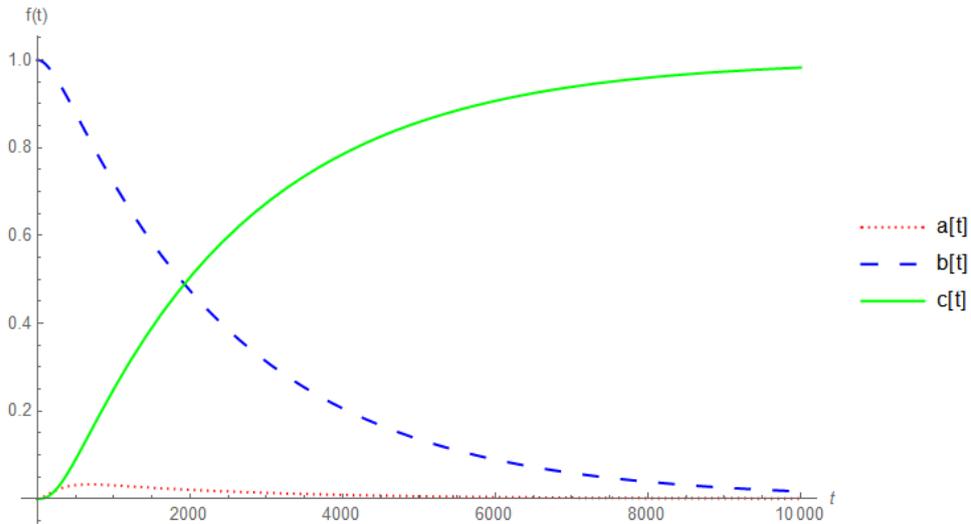


Рис. 29 Графики вероятностей при $\gamma = 0.01$; $g = 0.001$

```
Plot[{a[t, 0.0025, 1], b[t, 0.0025, 1], c[t, 0.0025, 1]}, {t, 0, 10000}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

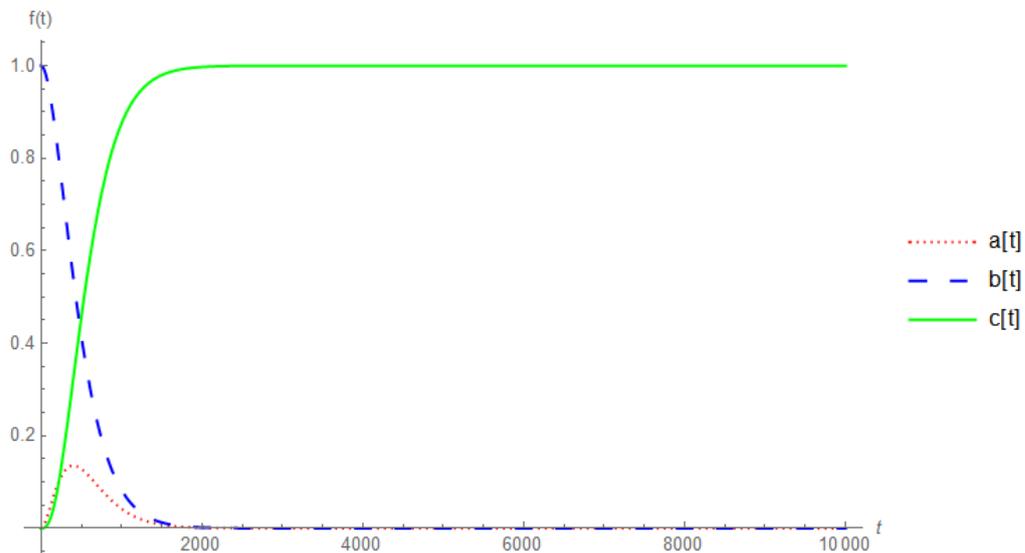


Рис. 30 Графики вероятностей при $\gamma = 0.01$; $g = 0.0025$ (кратные корни)

```
Plot[{a[t, 0.0025, 1], b[t, 0.0025, 1], c[t, 0.0025, 1]}, {t, 0, 1200}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

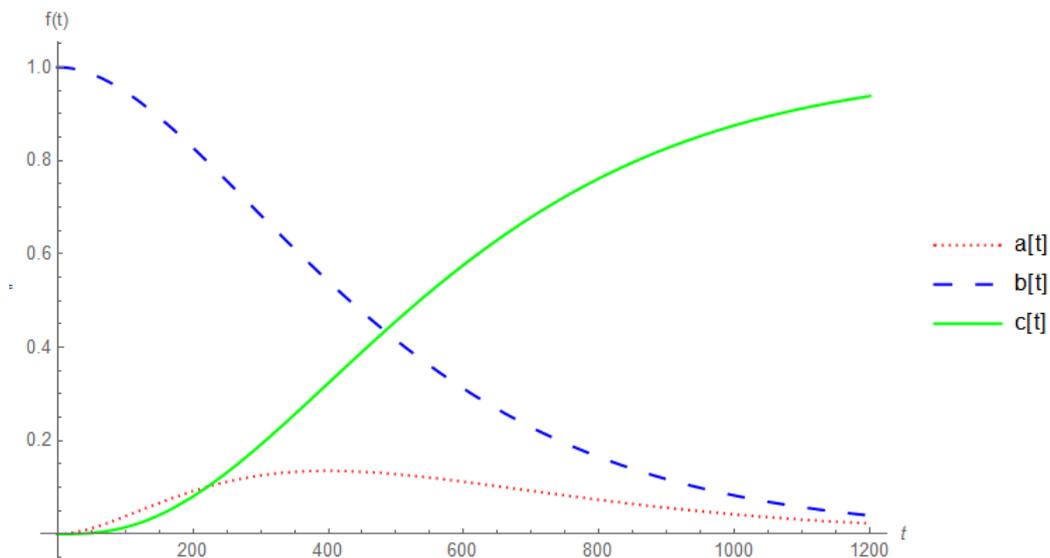


Рис. 31 Графики вероятностей при $\gamma = 0.01$; $g = 0.0025$ (кратные корни, масштаб изменен для удобства наблюдения динамики далее)

```
Plot[{a[t, 0.01, 0.003, 1], b[t, 0.01, 0.003, 1], c[t, 0.01, 0.003, 1]},
{t, 0, 1200}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

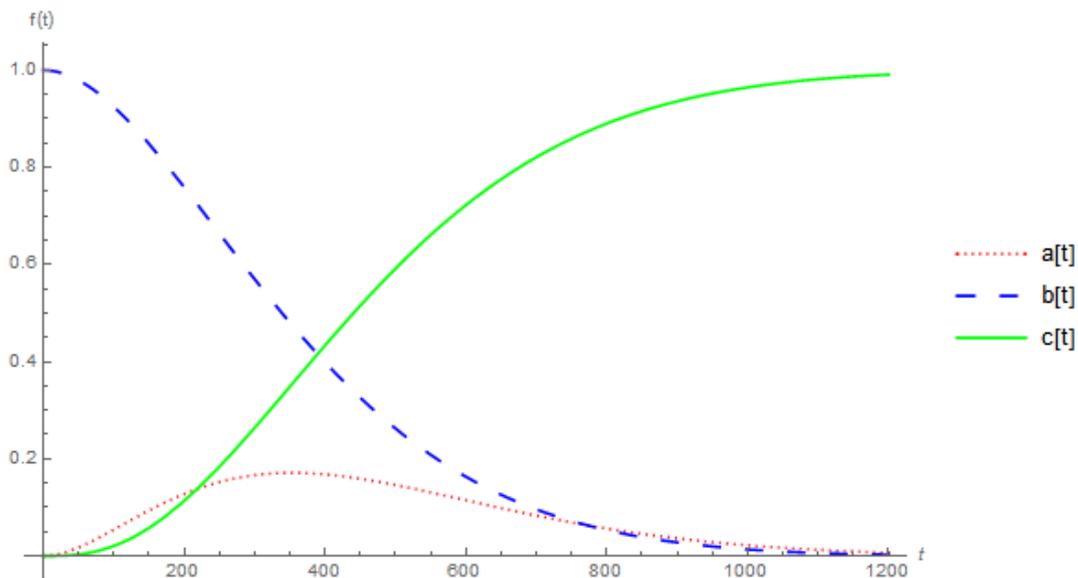


Рис. 32 Графики вероятностей при $\gamma = 0.01$; $g = 0.003$

```
Plot[{a[t, 0.01, 0.01, 1], b[t, 0.01, 0.01, 1], c[t, 0.01, 0.01, 1]}, {t, 0, 1200},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

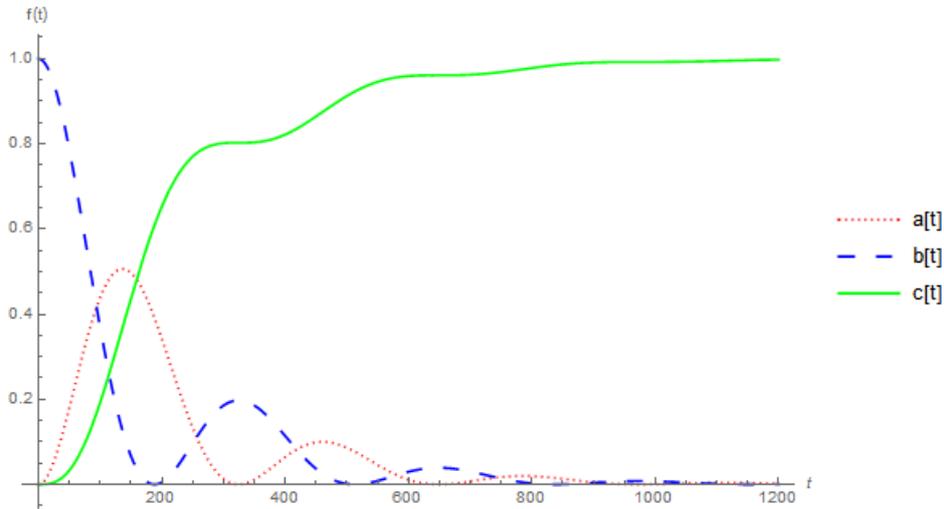


Рис. 33 Графики вероятностей при $\gamma = 0,01$; $g = 0,01$

```
Plot[{a[t, 0.01, 0.05, 1], b[t, 0.01, 0.05, 1], c[t, 0.01, 0.05, 1]}, {t, 0, 1200},
  AxesLabel -> {t, "f(t)"},
  PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
  PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

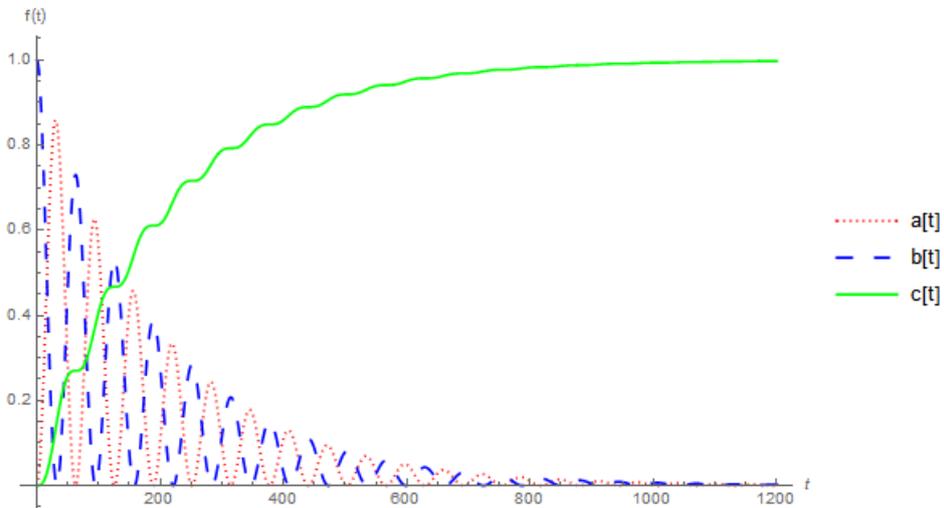


Рис. 34 Графики вероятностей при $\gamma = 0,01$; $g = 0,05$

```
Plot[{a[t, 0.1, 0.05, 1], b[t, 0.1, 0.05, 1], c[t, 0.1, 0.05, 1]}, {t, 0, 100}, AxesLabel -> {t, "f(t)"},
PlotStyle -> {{Dashing[Tiny], Red}, {Dashing[Large], Blue}, {Normal, Green}},
PlotLegends -> {"a[t]", "b[t]", "c[t]"}, ImageSize -> 500]
```

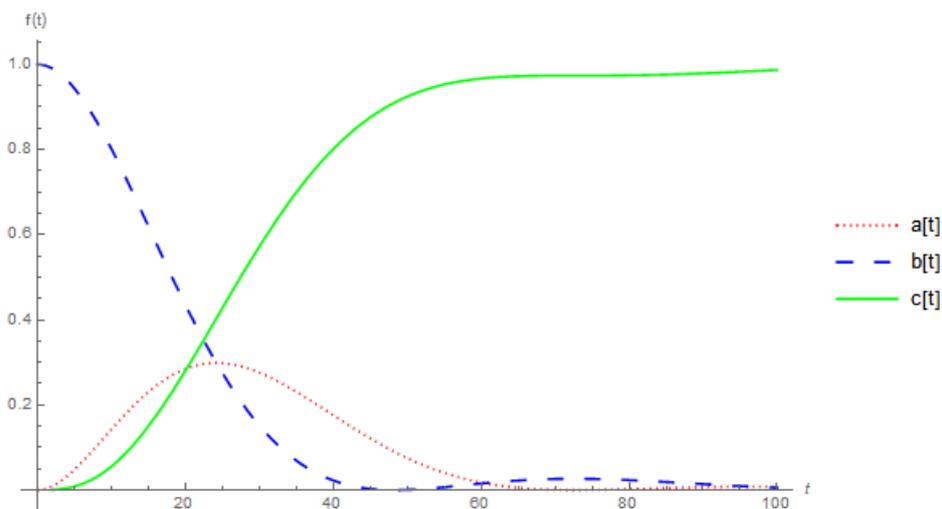


Рис. 35 Графики вероятностей при $\gamma = 0,1$; $g = 0,05$

При $\gamma \gg g$ (рис.28) заметно, что процесс вылета фотона из полости занимает чрезвычайно большое время, при увеличении g в 10 раз (рис.29), фотон вылетает значительно быстрее. В случае кратных корней (рис.30,31) похожая ситуация, а в случае комплексных корней происходят затухающие осцилляции $a(t), b(t)$, причём время, когда графики $a(t), b(t)$, сходятся к 0, одинаковое на рис.31-33 и примерно в 10 раз меньше при увеличении в 10 раз γ (рис.34, 35). Исходя из вышеописанного, можно заключить, что параметр γ влияет на скорость вылета фотона. вследствие очень малой энергии взаимодействия между атомом и фотоном. Ситуация на рис.28 объясняется очень малой энергией взаимодействия между атомом и фотоном.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были смоделированы квантовые системы на базе модели Джейнса – Каммингса, для случаев с единственным фотоном без атомов в оптическом резонаторе со стоком, куда этот фотон вылетает с течением времени и модель резонатора с фотоном и атомом, который может находиться в основном и возбужденном состоянии. При использовании уравнения Линдблада $i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho)$, где $\mathcal{L}(\rho) = \gamma(A\rho A^* - \frac{1}{2}\{\rho, A^*A\})$, была найдена динамика поведения вероятностей присутствия и отсутствия фотона в резонаторе (п.2.1), также динамика населённости резонатора (населённость – вероятность нахождения фотона в резонаторе, стоке), динамика вероятности возбуждения атома и динамика населённости стока (п.2.2).

В ходе выполнения работы использовались знания из аппарата линейной алгебры и курса обыкновенных дифференциальных уравнений, проводилось математическое моделирование.

В части исследования моделей применялись понятия линейного оператора, с помощью которых описано большинство процессов. Также применялось понятие системы дифференциальных уравнений и задачи Коши, при помощи которых искалось вероятности населенности в решении уравнения Линдблада.

В модели с фотоном получено, что вероятности населенности стока и резонатора распределены экспоненциально, в начальный момент времени они равны 0 и 1, затем по мере вылета фотона из резонатора происходит перераспределение вероятностей, и в пределе при времени $t \rightarrow \infty$ внешняя вероятность равна 1, а внутренняя 0.

В модели с атомом и фотоном решение уравнения Линдблада распадается на 4 случая – $\gamma = 0, 0 < \gamma < 4g; \gamma = 4g; \gamma > 4g$ (g – частота взаимодействия между атомом и фотоном в гамильтониане, γ – интенсивность взаимодействия модели с внешней средой). Для случаев $0 < \gamma < 4g; \gamma = 4g; \gamma > 4g$ был

проведен численный эксперимент при постоянном g и графически показано изменение динамики вероятностей в случае роста γ .

В случае $\gamma = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ в резонаторе атом поглощает фотон и находится в возбуждённом состоянии, после этого испускает фотон, затем принимает основное состояние и поглощает фотон, снова возбуждается и т.д. В результате происходят рабиевские осцилляции внутри резонатора, фотон не вылетает за пределы резонатора.

При $0 < \gamma < 4g$ и малых γ , после испускания атомом фотона, тот некоторое время находится в резонаторе, затем вылетает, графики вероятностей возбуждения атома и населённости резонатора представляют собой затухающие к 0 осцилляции. С увеличением γ , количество осцилляций уменьшается, фотон всё меньше находится в резонаторе после своего рождения. При $\gamma = 4g$ осцилляции прекращаются полностью.

При $\gamma > 4g$, вероятность возбуждения атома падает, вероятность нахождения в стоке растёт, причём после вылета фотон не задерживается в резонаторе. С увеличением γ , динамика перехода фотона из резонатора в сток становится более медленной. Данный эффект называется quantum bottleneck[6].

Также графически было показано, что в случае $\gamma \gg g$ при малых γ, g фотон не вылетает из полости долгое время, вследствие очень малой энергии взаимодействия между атомом и фотоном.

Во всех вышеописанных случаях было найдено аналитическое решение задачи Коши, получающейся из уравнения Линдблада с заданными начальными условиями, это решение проверено в программном пакете Wolfram Mathematica 10.0 и там же были построены графики вероятностей для всех изложенных случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Д.А.Кронберг, Ю.И.Ожигов, А.Ю.Чернявский. Алгебраический аппарат квантовых вычислений. Учебное пособие. М., МГУ, ВМиК, 2012. -56с.
2. Р. Фейнман. Дюжина лекций. 6 попроще и 6 посложней. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. -320с.
3. Викторова Н.Б., Ожигов Ю.И., Сковорода Н.А. Квантовые возрождения нерабиевского типа в модели Джейнса-Каммингса. Теоретическая и математическая физика. Москва. Наука. 2016. Том 189, N2, стр.312-320. (Scopus, Web of science).
4. Ю.И. Ожигов. Квантовые вычисления. Учебно-методическое пособие. М.: МГУ, ВМиК, 2003. -104с.
5. Викторова Н.Б., Кузнецова А.А., Ожигов Ю.И., Сковорода Н.А. Динамика запутанности света и вещества в модели Джейнса-Каммингса. 27 научно-практическая конференция “Примеры фундаментальных и прикладных исследований”. Новосибирск.2016, стр.47-56.
6. The Tyranny of Qubits - Quantum Technology’s Scalability Bottleneck John Gough Aberystwyth University, SY23 3BZ, Wales, United Kingdom, 2017. – 8с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000, -176с.
8. E.T. Jaynes, F.W.Cummings, «Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser».Proc. IEEE, 51:1 (1963), стр. 89-109.
9. А.Ю.Хренников. Введение в квантовую теорию информации / А. Ю. Хренников. - М.: Физматлит, 2008. -283 с.